

Казанский инновационный университет имени В. Г. Тимирязова

МАТЕМАТИКА

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА.
ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Сборник задач

Казань
Познание
2019

УДК 51(076.1)

ББК 22.1

М34

*Печатается по решению секции математических дисциплин
учебно-методического совета и редакционно-издательского совета
Казанского инновационного университета им. В. Г. Тимирясова*

Рецензенты:

С. И. Филиппов, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры высшей математики
Казанского инновационного университета им. В. Г. Тимирясова;

Ю. Н. Бурханова, канд. пед. наук, доцент кафедры высшей математики
и информационных технологий Набережночелнинского филиала
Казанского инновационного университета им. В. Г. Тимирясова

**М34 Математика. Уравнения и неравенства. Элементы комбинаторики,
теории вероятностей и математической статистики** : сборник задач /
Л. Н. Гаврилова, З. Ш. Аглямова, Е. К. Митина, Т. Н. Кожеманова. –
Казань : Изд-во «Познание» Казанского инновационного университета
им. В. Г. Тимирясова, 2019. – 52 с.

Сборник задач содержит задания по разделам «Уравнения и неравенства» и «Элементы комбинаторики, теории вероятностей и математической статистики» в рамках дисциплины «Математика» общеобразовательного цикла для студентов, обучающихся по различным специальностям колледжа.

Данный сборник задач может быть использован для проведения практических занятий и организации самостоятельной работы студентов при изучении дисциплины «Математика» общеобразовательного цикла.

УДК 51(076.1)

ББК 22.1

© Гаврилова Л. Н., 2019

© Аглямова З. Ш., 2019

© Митина Е. К., 2019

© Кожеманова Т. Н., 2019

© Казанский инновационный университет
им. В. Г. Тимирясова, 2019

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА	5
Рациональные уравнения и неравенства.....	6
Иррациональные уравнения и неравенства.....	10
Показательные уравнения и неравенства	11
Логарифмические уравнения и неравенства	14
Тригонометрические уравнения и неравенства	17
Системы уравнений.....	23
Текстовые задачи.....	27
ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ.....	32
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	41
ПРИЛОЖЕНИЕ	42

ВВЕДЕНИЕ

Настоящий сборник задач предназначен для проведения практических занятий и организации самостоятельной работы студентов различных специальностей колледжа по разделам «Уравнения и неравенства» и «Элементы комбинаторики, теории вероятностей и математической статистики» при изучении дисциплины «Математика» общеобразовательного цикла. Данное пособие разработано в соответствии с рабочими программами дисциплины «Математика» общеобразовательного цикла, составленными на основе требований федеральных государственных образовательных стандартов среднего профессионального образования.

Пособие содержит задачи различного уровня сложности по следующим темам дисциплины «Математика» общеобразовательного цикла: «Рациональные уравнения и неравенства», «Иррациональные уравнения и неравенства», «Показательные уравнения и неравенства», «Логарифмические уравнения и неравенства», «Тригонометрические уравнения и неравенства», «Системы уравнений», «Текстовые задачи», а также задачи по элементам комбинаторики, теории вероятностей и математической статистики.

В приложении приводится краткий справочный материал по рассматриваемым темам.

Применение настоящего пособия при изучении дисциплины «Математика» общеобразовательного цикла должно способствовать тому, что будут достигнуты:

личностные результаты освоения:

– готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности;

метапредметные результаты освоения:

– владение навыками познавательной, учебно-исследовательской и проектной деятельности, навыками разрешения проблем; способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания;

– готовность и способность к самостоятельной информационно-познавательной деятельности, владение навыками получения необходимой информации из словарей разных типов, умение ориентироваться в различных источниках информации, критически оценивать и интерпретировать информацию, получаемую из различных источников;

предметные результаты освоения:

– сформированность представлений о математике как части мировой культуры и о месте математики в современной цивилизации, о способах описания на математическом языке явлений реального мира;

– сформированность представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий;

– владение методами доказательств и алгоритмов решения; умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

– владение стандартными приемами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем; использование готовых компьютерных программ, в том числе для поиска пути решения и иллюстрации решения уравнений и неравенств;

– сформированность представлений о процессах и явлениях, имеющих вероятностный характер, о статистических закономерностях в реальном мире, об основных понятиях элементарной теории вероятностей; умений находить и оценивать вероятности наступления событий в простейших практических ситуациях и основные характеристики случайных величин;

– сформированность представлений о необходимости доказательств при обосновании математических утверждений и роли аксиоматики в проведении дедуктивных рассуждений;

– сформированность понятийного аппарата по основным разделам курса математики; знаний основных теорем, формул и умения их применять; умения доказывать теоремы и находить нестандартные способы решения задач;

– сформированность умений моделировать реальные ситуации, исследовать построенные модели, интерпретировать полученный результат;

– владение умениями составления вероятностных моделей по условию задачи и вычисления вероятности наступления событий, в том числе с применением формул комбинаторики и основных теорем теории вероятностей; исследования случайных величин по их распределению.

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Решение рациональных, показательных, логарифмических и тригонометрических уравнений и неравенств. Решение иррациональных уравнений.

Основные приемы решения систем уравнений: подстановка, алгебраическое сложение, введение новых переменных. Равносильность уравнений, неравенств, систем. Решение систем уравнений с двумя неизвестными (простейшие типы).

Использование свойств и графиков функций при решении уравнений и неравенств. Метод интервалов.

Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учет реальных ограничений.

Рациональные уравнения и неравенства

1. Решить уравнения:

а) $3(x-2) - 5 = 4 - (5x-1)$;

б) $|2x-3| = 5$;

в) $7 - 2(3-x) = 4(x-1) + 5$;

г) $|4-3x| = 2$.

2. Решить уравнения:

а) $4x - \frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 57$;

б) $\frac{5(x+1)}{8} + \frac{2(x-1)}{11} - \frac{x-3}{2} = 9$;

в) $\frac{3x}{2} + \frac{x}{6} - \frac{2x}{9} = 13$;

г) $\frac{x-3}{4} + \frac{x-4}{3} - \frac{x-5}{2} = \frac{x-1}{8}$.

3. Решить уравнения:

а) $\frac{x^2}{12} = \frac{7x}{12} - 1$;

б) $2x - \frac{10}{3} = \frac{x^2}{6}$.

4. Решить уравнения выделением полного квадрата:

а) $x^2 + 8x - 33 = 0$;

б) $x^2 + 12x - 64 = 0$;

в) $x^2 - 8x = 20$;

г) $x^2 - 4x = 45$.

5. Решить уравнения:

а) $3x^2 + 5x - 2 = 0$;

б) $2x^2 - 7x + 6 = 0$;

в) $4x^2 + x - 3 = 0$;

г) $5x^2 - 8x + 3 = 0$.

6. Решить уравнения:

а) $x^2 - 4,5x + 4,5 = 0$;

б) $x^2 + 2,5x + 1 = 0$;

в) $x^2 - 2,4x - 13 = 0$;

г) $x^2 - 5,6x + 6,4 = 0$.

7. Решить уравнения:

а) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$;

в) $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$;

д) $x^4 - 4x^2 - 45 = 0$;

б) $x^4 - 19x^2 + 48 = 0$;

г) $2x^4 - 5x^2 + 2 = 0$;

е) $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$.

8. Решить уравнения:

а) $(x^2 + 3x)^2 - 14(x^2 + 3x) = -40$;

в) $(x^2 + 2x)^2 - 7(x^2 + 2x) = 8$;

б) $(x^2 + 3x)^2 - 32(x^2 + 3x) = -112$;

г) $(x^2 - 3x)^2 - 14(x^2 - 3x) = -40$.

9. Решить уравнения:

а) $\frac{5}{3x+7} = \frac{7}{5x+9}$;

б) $\frac{3x}{x+1} + \frac{x-1}{x-2} = 4$.

10. Решить уравнения:

а) $\frac{3}{x^2+1} + \frac{7}{x^2+3} = \frac{8}{5}$;

в) $\frac{5}{x^2+1} + \frac{3}{x^2+6} = \frac{7}{10}$;

б) $\frac{7}{x^2+3} + \frac{3}{x^2+11} = \frac{6}{5}$;

г) $\frac{8}{x^2+1} + \frac{3}{x^2+6} = 1$.

11. Решить уравнения:

а) $\frac{3}{x+3} - \frac{2}{x-3} = \frac{4}{x^2-9}$;

в) $\frac{x+1}{x+3} - \frac{12}{x^2-9} = \frac{2-x}{3-x}$;

б) $\frac{3x}{x+5} - 1 = \frac{2x+5}{x}$;

г) $\frac{3x^2}{3x-1} - 2 = \frac{2x+1}{3x+1}$.

12. Решить уравнения:

а) $x^5 = 6$;

в) $x^3 = 2$;

б) $x^8 = 10$;

г) $x^{10} = 12$.

13. Решить уравнения:

а) $2x^5 + 486 = 0$;

в) $3x^7 + 384 = 0$;

б) $3x^4 - 324 = 0$;

г) $5x^6 - 310 = 10$.

14. Решить уравнения:

а) $10 + 9x^5 = 1$;

в) $3x^5 + 96 = 0$;

б) $700 - 3x^8 = -68$;

г) $0,3x^5 + 9,6 = 0$.

15. Решить неравенства:

а) $x + 6 > 2 - 3x$;

в) $\frac{x-1}{2} + x < 1,5x + 3,5$;

д) $x - 4(3 - x) > 2x + 7$;

б) $3x - 6 \geq 4x - 9$;

г) $\frac{5x-2}{3} - \frac{3-x}{2} > 1$;

е) $3 + \frac{2-3x}{4} < 2x$.

16. Решить неравенства:

а) $x^2 - 12x + 32 \leq 0$;

в) $2x^2 + x - 7 \geq 0$;

д) $2x^2 - x - 15 > 0$;

ж) $2x^2 - 13x + 6 < 0$;

и) $2x^2 + 5x - 7 < 0$;

л) $5x^2 + 3x - 8 > 0$;

н) $x^2 - 3x - 4 > 0$;

п) $x^2 - 8x + 7 \leq 0$;

б) $x^2 + 8x - 12 \leq 0$;

г) $3x^2 - 5x - 1 \leq 0$;

е) $3x^2 - 6x + 32 > 0$;

з) $x^2 + 12x + 80 < 0$;

к) $5x^2 - 4x + 21 > 0$;

м) $4x^2 - 2x + 13 < 0$;

о) $x^2 - 14x + 45 \geq 0$;

р) $3x^2 + 4x - 4 \geq 0$.

17. Решить неравенства:

а) $x^2 - 9 > 0$;

в) $x^2 - 25 > 0$;

б) $x^2 - 16 < 0$;

г) $x^2 - 49 < 0$.

18. Решить неравенства:

а) $(x-2)(x+3) \geq 0$;

в) $(x-4)(x+3) \leq 0$;

б) $(x-2)(x+3) \leq 0$;

г) $(x+4)(x-3) \geq 0$.

19. Решить неравенства:

а) $(x-1)(x-2)(x-3) \geq 0$;

в) $(x+1)(x+2)(x+3) \leq 0$;

б) $(x-2)(x+2)(x-3) \leq 0$;

г) $(x^2-4)(x+5) \geq 0$.

20. Решить неравенства:

а) $(x^2 + 2x + 1)(x-1) \leq 0$;

в) $(x^2 + 2x + 1)(x-1) \geq 0$;

б) $(x^2 - 6x + 9)(x-5) \geq 0$;

г) $(x^2 - 6x + 9)(x-2) \leq 0$.

21. Решить неравенства:

а) $(x-1)(x+2)^2 \geq 0$;

в) $(x^2 - 4x + 3)(x^2 - 1)^3 \geq 0$;

б) $(x-4)(x-2)^2 \leq 0$;

г) $(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 4) \leq 0$.

22. Решить неравенства:

а) $\frac{1}{x-1} \geq 0$;

в) $\frac{x-8}{2x+3} \geq 0$;

б) $\frac{5}{2-x} \leq 0$;

г) $\frac{3-4x}{5+x} \leq 0$.

23. Решить неравенства:

а) $\frac{2x-3}{x+1} > 1$;

в) $\frac{2}{x-4} < 1$;

д) $\frac{x-2}{x+1} < 1$;

б) $\frac{3x+2}{x-2} < 1$;

г) $\frac{5x+4}{x-3} < 4$;

е) $\frac{3x+2}{x-1} < 2$.

24. Решить неравенства:

а) $\frac{(x-3)(x-4)}{x-5} > 0;$

д) $\frac{(1-x)(x+2)}{x-3} \leq 0;$

г) $\frac{(x-9)(x-3)}{x+4} > 0;$

е) $\frac{x}{(x+1)(x-8)} < 0;$

б) $\frac{(x+1)(x-6)}{x+5} < 0;$

в) $\frac{(x+1)(x-1)}{x-3} < 0;$

д) $\frac{x}{(x-3)(x+4)} > 0;$

ж) $\frac{3-x}{(4-x)(x+5)} \geq 0.$

25. Решить неравенства:

а) $\frac{x^2 + 5x - 6}{(x-1)(x+3)} > 0;$

в) $\frac{x^2 - 9}{(x+3)(x-1)} > 0;$

б) $\frac{x^2 + 4x + 4}{(x+1)(x-3)} < 0;$

г) $\frac{x^2 + 2x - 3}{(x-4)(x+1)} \geq 0.$

26. Решить неравенства:

а) $\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 9} \geq 0;$

в) $\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9} < 0;$

б) $\frac{x^2 - 7x + 10}{25 - x^2} \leq 0;$

г) $\frac{2x^3 + 5x^2 + 2x}{36 - x^2} \geq 0.$

27. Решить неравенства:

а) $\frac{5-x}{x^2 - 2x - 24} \geq 0;$

в) $\frac{3x-15}{x^2 + 5x - 14} \geq 0;$

д) $\frac{(x-2)(x+3)}{x^2 - 4} < 0;$

б) $\frac{x-1}{x^2 + 4x + 2} < 0;$

г) $\frac{3x-6}{2x^2 + 5x - 3} < 0;$

е) $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} > 0.$

28. Решить неравенства:

а) $\frac{x}{4x-3} < \frac{1}{x};$

в) $\frac{3}{x} \leq \frac{1}{x+2};$

б) $\frac{x-5}{3x-9} > \frac{2}{x};$

г) $\frac{1}{2x} \geq \frac{1}{x-3}.$

29. Решить неравенства:

а) $1-x \geq \frac{1}{x-3};$

в) $\frac{5}{x+2} < x-2;$

б) $\frac{3}{x-1} > x+1;$

г) $\frac{5}{x} - 4 \leq \frac{2x+3}{x-1}.$

30. Решить неравенства:

а) $x - 1 \geq \frac{x^2 - 5x - 1}{x - 1}$;

б) $\frac{x^2 - 4x - 1}{x - 2} \leq x + 2$.

Иррациональные уравнения и неравенства

31. Решить уравнения:

а) $\sqrt{7x - 3} = -4$;

б) $\sqrt{15 - 4x} = 3$;

в) $\sqrt{3x - 8} = 5$;

г) $\sqrt{-21 - x} = 2$;

д) $\sqrt{\frac{2x + 5}{3}} = 5$;

е) $\sqrt{\frac{1}{5 - 2x}} = \frac{1}{3}$;

ж) $\sqrt{61 - x^2} = 5$;

з) $\sqrt{x^4 + 19} = 10$.

32. Решить уравнения:

а) $\sqrt{2 - x} = x$;

б) $\sqrt{6 - x} = x$;

в) $\sqrt{2x - 1} = x - 2$;

г) $\sqrt{2x + 1} = x - 1$;

д) $\sqrt{x + 2} = 2x - 11$;

е) $\sqrt{x + 1} = 5 - x$;

ж) $\sqrt{x + 4} = 8 - x$;

з) $\sqrt{x - 1} = 2x - 17$;

и) $\sqrt{1 - x} = x + 1$;

к) $\sqrt{2x + 4} = x - 2$;

л) $\sqrt{3x + 1} = x - 1$;

м) $\sqrt{2x + 9} = x - 3$;

н) $\sqrt{x + 5} = x - 1$;

о) $\sqrt{16 - x} = x - 10$;

п) $\sqrt{8 - x} = 2 - x$;

р) $\sqrt{7x - 3} = x - 3$;

с) $\sqrt{45 - 2x} = x - 5$;

т) $\sqrt{x + 2} = 3x - 4$;

у) $\sqrt{x + 1} = x - 5$;

ф) $\sqrt{11 + 7x} = x - 7$.

33. Решить уравнения:

а) $2\sqrt{x + 5} = x + 2$;

б) $3\sqrt{2 - x} = x + 2$;

в) $5\sqrt{x + 3} = 3 - x$;

г) $7\sqrt{x} = 2x - 15$.

34. Решить уравнения:

а) $\sqrt{2x^2 - 4x - 5} = x - 2$;

б) $\sqrt{2x^2 - 10x + 9} = x - 3$;

в) $\sqrt{x^2 + 3x - 3} = 2x - 3$;

г) $\sqrt{x^2 + 2x + 10} = 2x - 1$;

д) $\sqrt{7 - 2x - x^2} = x - 1$;

е) $\sqrt{5 + 2x - x^2} = x + 1$;

ж) $\sqrt{1 + 4x - x^2} = x - 1$;

з) $\sqrt{4 - 6x - x^2} = x + 4$.

35. Решить уравнения:

а) $x = \sqrt[3]{x^3 + x^2 - 6x + 8}$;

б) $x - 2 = \sqrt[3]{x^2 - 8}$;

в) $x = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - 8x + 20}$;

г) $x + 1 = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + x}$.

36. Решить уравнения:

а) $\sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{x}$;

б) $\sqrt{x} = \sqrt{x^2 - x - 3}$;

в) $\sqrt{6 - x^2} = \sqrt{x + 6}$;

г) $\sqrt{3 - x} = \sqrt{x^2 - 5x - 2}$.

37. Решить уравнения:

а) $\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x} + 2 = 0$;

в) $\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[6]{x} + 3 = 0$;

б) $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} = 2$;

г) $\sqrt[3]{x} - 5\sqrt[6]{x} = 6$.

38. Решить неравенства:

а) $\sqrt{x^2 - 5} > 2$;

в) $\sqrt{x+12} < x$;

д) $\sqrt{x^2 + 4x} > 2 - x$;

б) $\sqrt{x-2} < 5$;

г) $\sqrt{2x+9} < 3-x$;

е) $\sqrt{2x+1} > 1-x$.

39. Решить неравенства:

а) $\sqrt{5x+1} < x-1$;

в) $\sqrt{6x+7} > x+2$;

б) $\sqrt{3x+4} > 2x-4$;

г) $\sqrt{5x+6} > x+2$.

40. Решить неравенства:

а) $\sqrt{-x^2 - 5x} > \sqrt{-x-3}$;

в) $\sqrt{x^2 - x} > \sqrt{3x-1}$;

б) $\sqrt{x^2 - 6x} > \sqrt{-x-1}$;

г) $\sqrt{x^2 - 7x} > \sqrt{-x-2}$.

Показательные уравнения и неравенства

41. Решить уравнения:

а) $2^{2x} = 2^{4\sqrt{3}}$;

в) $7^{x-2} = 49$;

д) $8^{2x^2-3x-3} = 64$;

ж) $0,2^x = \frac{1}{25}$;

и) $2^{11-2x} = 8^{3x}$;

л) $3^{2-x} = \frac{1}{27}$;

б) $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-2} = \frac{1}{7}$;

г) $6^{x-11} = 216$;

е) $5^{3x^2-13x+7} = 125$;

з) $\left(\frac{2}{5}\right)^{2x+1} = 0,16$;

к) $1,5^{4x+3} = 2\frac{1}{4}$;

м) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1} = \left(\frac{7}{3}\right)^{5x-3}$.

42. Решить уравнения:

а) $4^{2x^2+9x-5} = 1$;

в) $2^{x^2-7x+10} = 1$;

д) $5^{x^2-5x-6} = 1$;

ж) $100^{x^2-1} = 10^{1-5x}$;

и) $2^{-x^2+3x} = 4$;

б) $3^{x^2+x-12} = 1$;

г) $0,3^{x^3-x^2+x-1} = 1$;

е) $\left(2\frac{1}{3}\right)^{-x^2-2x+3} = 1$;

з) $2^{\frac{x-1}{x-2}} = 4$;

к) $729^{\frac{3x-3}{x}} = 3^{\frac{5x}{2}}$;

$$\text{л)} \left(\frac{1}{9} \cdot 27^x\right)^2 = 81;$$

$$\text{м)} \left(\frac{1}{125} \cdot 5^x\right)^2 = 25;$$

$$\text{н)} \left(\frac{1}{6} \cdot 36^{2x}\right)^3 = 36;$$

$$\text{о)} \left(\frac{1}{64} \cdot 4^x\right)^3 = 256.$$

43. Решить уравнения:

$$\text{а)} 7^x - 7^{x-1} = 6;$$

$$\text{б)} 2^x + 2^{x-3} = 18;$$

$$\text{в)} 7^{x+3} - 7^x = 2394;$$

$$\text{г)} 3^{2x-1} + 3^{2x} = 108;$$

$$\text{д)} 3^x + 3^{3-x} = 12;$$

$$\text{е)} 2^{3x+2} - 2^{3x-2} = 30;$$

$$\text{ж)} 8^{x+1} - 8^x = 448;$$

$$\text{з)} 4^{x+1} + 4^x = 320;$$

$$\text{и)} x \cdot 6^{3x} - 36 \cdot 6^{3x} = 0;$$

$$\text{к)} 81 \cdot 9^{5x} + x \cdot 9^{5x} = 0;$$

$$\text{л)} 7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x+1} = 539;$$

$$\text{м)} 2 \cdot 3^{x+1} - 3^x = 15;$$

$$\text{н)} 3 \cdot 5^{x+3} + 2 \cdot 5^{x+1} = 77;$$

$$\text{о)} 3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2} = 75;$$

$$\text{п)} 5 \cdot 9^x + 9^{x-2} = 406;$$

$$\text{р)} 5^{3x} + 3 \cdot 5^{3x-2} = 140;$$

$$\text{с)} 5^x + 3 \cdot 5^{x-2} = 140;$$

$$\text{т)} \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} - \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} = 4,8.$$

44. Решить уравнения:

$$\text{а)} 5^{3x} - 2 \cdot 5^{3x-1} - 3 \cdot 5^{3x-2} = 60;$$

$$\text{б)} 4^x - 3^{x-0,5} = 3^{x+0,5} - 2^{2x-1};$$

$$\text{в)} 2^{5x-1} + 2^{5x-2} + 2^{5x-3} = 896;$$

$$\text{г)} 5^{2x-1} + 2^{2x} = 5^{2x} - 2^{2x+2};$$

$$\text{д)} 2^{x+1} + 2^{x-1} + 2^x = 28;$$

$$\text{е)} 3 \cdot 4^x - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 4^x = 0;$$

$$\text{ж)} 3^{x-1} - 3^x + 3^{x+1} = 63;$$

$$\text{з)} 3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x;$$

$$\text{и)} 2^x - 2^{x+1} + 2^{x+2} = 96;$$

$$\text{к)} 2 \cdot 25^x - 5 \cdot 10^x + 2 \cdot 4^x = 0.$$

45. Решить уравнения:

$$\text{а)} 9^x - 8 \cdot 3^x - 9 = 0;$$

$$\text{б)} 36^x - 4 \cdot 6^x - 12 = 0;$$

$$\text{в)} 49^x - 8 \cdot 7^x + 7 = 0;$$

$$\text{г)} 4^x - 2^x - 12 = 0;$$

$$\text{д)} 9^x - 3^x - 6 = 0;$$

$$\text{е)} 8 \cdot 4^x - 6 \cdot 2^x + 1 = 0;$$

$$\text{ж)} 64^x - 8^x - 56 = 0;$$

$$\text{з)} 9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0;$$

$$\text{и)} 25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0;$$

$$\text{к)} 16^x - 17 \cdot 4^x + 16 = 0;$$

$$\text{л)} 7^{2x} - 6 \cdot 7^x + 5 = 0.$$

46. Решить уравнения:

$$\text{а)} 3^x = 5^{2x};$$

$$\text{б)} 4^x = 3^{\frac{x}{2}};$$

$$\text{в)} 9^{x+1} = 5^{x+1};$$

$$\text{г)} 7^{x-2} = 4^{2-x}.$$

47. Решить графически уравнения:

$$\text{а)} 3^x = 4 - x;$$

$$\text{б)} \left(\frac{1}{2}\right)^x = x + 3;$$

$$\text{в)} \left(\frac{1}{3}\right)^x = x + 1;$$

$$\text{г)} 4^x = 5 - x.$$

48. Является ли число 1 решением неравенства?

а) $2^x < 3$;

б) $2^x > 1$;

в) $2^x \leq 1$;

г) $(0,5)^x < 3$;

д) $(0,1)^x > 1$;

е) $(0,2)^x \leq 0,2$.

49. Решить неравенства:

а) $2^x > 4$;

б) $5^x < 125$;

в) $3^x > -1$;

е) $8^x > 64$;

г) $(0,5)^x < -1$;

д) $(0,2)^x > 1$.

50. Решить неравенства:

а) $4^x \geq 2$;

б) $25^x \leq 5$;

в) $8^x \geq 4$;

г) $4^x \leq \frac{1}{2}$;

д) $9^x \leq \frac{1}{3}$;

е) $16^x \geq \frac{1}{2}$.

51. Решить неравенства:

а) $5^{3x+5} > 25$;

б) $6^{6x-4} < 36$;

в) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x-3} > \frac{8}{125}$;

г) $\left(\frac{3}{5}\right)^{3x-7} < \frac{9}{25}$.

52. Решить неравенства:

а) $81 \cdot 3^x > 1$;

б) $27 \cdot 3^x < 1$;

в) $3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x > -7$;

г) $2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x < -5$;

д) $250 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x < 2$;

е) $12 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x > 3$.

53. Решить неравенства:

а) $9 \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^{2+3x} \geq \frac{1}{81}$;

б) $4 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{2+5x} \leq \frac{1}{16}$;

в) $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{81}\right)^{3-2x} < 9$;

г) $\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{4x-3} > 32$.

54. Решить неравенства:

а) $2^{x+2} + 2^x > 20$;

б) $3^{x+2} - 3^x < 24$;

в) $4^{x+1} + 4^x > 1,25$;

г) $3^{x+2} - 3^x < 24$;

д) $4^x - 4^{x-1} < 3$;

е) $5^x - 5^{x-2} < 24$.

55. Решить неравенства:

а) $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 \leq 0$;

в) $25^x - 4 \cdot 5^x - 5 \leq 0$;

д) $(0,25)^x - 5 \cdot (0,5)^x \geq -4$;

б) $\left(\frac{1}{9}\right)^x - 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} + 27 < 0$;

г) $16^x + 4^x - 6 > 0$;

е) $3^{2x+3} - 3^{x+1} - 2 < 0$.

56. Решить графически неравенства:

а) $2^x \leq 3 - x$;

в) $\left(\frac{1}{4}\right)^x \geq 2x + 1$;

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 2x + 5$;

г) $3^x \geq 4x + 1$.

Логарифмические уравнения и неравенства

57. Решить уравнения:

а) $9^x = 5$;

в) $2^x = 10$;

д) $0,2^{4-x} = 3$;

ж) $3^{2-3x} = 8$;

б) $0,3^x = 7$;

г) $10^x = \pi$;

е) $5^{x^2} = 7$;

з) $7^{2x} = 4$.

58. Решить уравнения:

а) $\log_2 x = 3$;

в) $\log_{\sqrt{2}} x = 4$;

д) $\log_{0,4} x = -1$;

ж) $\log_x 3 = 2$;

к) $\log_x 225 = \frac{2}{3}$;

б) $\log_5 x = -2$;

г) $\lg x = 0$;

е) $\log_9 x = -\frac{1}{2}$;

з) $\log_x 5 = 0$;

и) $\log_{6-x} x = 2$.

59. Решить уравнения:

а) $\log_3(4x - 1) = 2$;

в) $\log_5(2x + 3) = 1$;

д) $\log_2(1 - 3x) = 3$;

ж) $\log_{0,25}(5x - 1) = -0,5$;

и) $\log_{\frac{1}{3}}(5x - 7) = -1$;

л) $\log_{\sqrt[4]{27}}(x - 2) = 4$;

н) $\log_{\sqrt[3]{4}}(x - 1) = 6$;

б) $\log_2(3x - 1) = 3$;

г) $\log_2(2x + 7) = 4$;

е) $\log_3(1 - 2x) = 1$;

з) $\log_{\frac{1}{2}}(2x - 3) = -2$;

к) $\log_{\frac{1}{2}}(2x + 3) = -1$;

м) $\log_{\sqrt[3]{8}}(x - 2) = 10$;

о) $\log_{\frac{\sqrt{10}}{3}}(1 - 3x) = 2$;

$$\text{п) } \log_{\frac{\sqrt{6}}{3}}(2x-1) = 2;$$

$$\text{с) } \log_{27}(8-3x) = \frac{1}{3};$$

$$\text{р) } \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{x}{3} + 7\right) = 0;$$

$$\text{т) } \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{x-1}{x+2}\right) = 1.$$

60. Решить уравнения:

$$\text{а) } \log_2(x^2 - 8,5) = -1;$$

$$\text{в) } \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 6) = -1;$$

$$\text{д) } \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 3x + 1) = 0.$$

$$\text{б) } \log_4(x^2 - 3) = 0;$$

$$\text{г) } \log_{\frac{1}{6}}(x^2 - 3x + 2) = -1;$$

61. Решить уравнения:

$$\text{а) } \log_4(2-x) = \log_4 3;$$

$$\text{в) } \log_3(x-5) = \log_3(2-x);$$

$$\text{д) } \log_5(9-4x) = \log_5(3-2x);$$

$$\text{ж) } \log_2(x-3) = \log_2(2x-5);$$

$$\text{и) } \log_{\frac{1}{2}}(3x-1) = \log_{\frac{1}{2}}(6x+8);$$

$$\text{б) } \log_4(5x-3) = \log_4(2x+9);$$

$$\text{г) } \log_2(x-7) = \log_2(11-x);$$

$$\text{е) } \log_3(5x+3) = \log_3(7x+5);$$

$$\text{з) } \lg(x^2 - 2) = \lg x;$$

$$\text{к) } \log_{\frac{1}{7}}(x+3) = \log_{\frac{1}{7}}(4x-3).$$

62. Решить уравнения:

$$\text{а) } \log_2^2 x - \log_2 x - 2 = 0;$$

$$\text{в) } \log_3^2 x - 4\log_3 x + 3 = 0;$$

$$\text{д) } \lg^2 x - \lg x^2 + 1 = 0;$$

$$\text{е) } \lg^2 x - 3\lg x = 4;$$

$$\text{б) } \log_2^2 x - 5\log_2 x + 6 = 0;$$

$$\text{г) } \log_{0,5}^2 x + \log_{0,5} x - 2 = 0;$$

$$\text{д) } \log_3^2 x - 2\log_3 x - 3 = 0;$$

$$\text{ж) } \log_5^2 x - \log_5 x = 2.$$

63. Решить уравнения:

$$\text{а) } \lg(x-1) + \lg(x+1) = 0;$$

$$\text{в) } \log_3(x-2) + \log_3(x+6) = 2;$$

$$\text{д) } \log_3(5-x) + \log_3(-1-x) = 3;$$

$$\text{ж) } \log_{\sqrt{6}}(x-1) + \log_{\sqrt{6}}(x+4) = 2;$$

$$\text{и) } \log_{\sqrt{7}}(x+10) + \log_{\sqrt{7}}(x+4) = 2;$$

$$\text{б) } \lg(x + \sqrt{3}) + \lg(x - \sqrt{3}) = 0;$$

$$\text{г) } \log_2(x-2) + \log_2(x-3) = 1;$$

$$\text{е) } \log_2(x-5) + \log_2(x+2) = 3;$$

$$\text{з) } \log_{\sqrt{6}}(x-4) + \log_{\sqrt{6}}(x+1) = 2;$$

$$\text{к) } \log_{\frac{1}{5}}(x-10) - \log_{\frac{1}{5}}(x+2) = -1.$$

64. Решить графически уравнения:

$$\text{а) } \lg x = 1 - x;$$

$$\text{в) } \log_{\frac{1}{5}} x = x - 6;$$

$$\text{б) } \log_{\frac{1}{3}} x = x - 4;$$

$$\text{г) } \log_2 x = 3 - x.$$

65. Решить уравнения:

$$\text{а) } \log_3 \log_2 x = 2;$$

$$\text{в) } \log_7 \log_3 \log_2 x = 0;$$

$$\text{б) } \log_3 \log_3 x = 1;$$

$$\text{г) } \log_{\pi} \log_3 \log_2 \log_2 x = 0.$$

66. Решить уравнения:

- а) $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$;
б) $\log_{81} x + \log_9 x + \log_3 x = 7$;
в) $2\log_2(\log_2 x) + \log_{0,5}(\log_2 x) = 1$;
г) $2\log_{0,5}(\log_2 x) + \log_2(\log_2 x) = -1$.

67. Решить уравнения:

- а) $\log_2(9 - 2^x) = 3 - x$;
б) $\log_2(25^{x+3} - 1) = 2 + \log_2(5^{x+3} + 1)$;
в) $\log_4(2 \cdot 4^{x-2} - 1) = 2x - 4$;
г) $\log_2(4^x + 4) = \log_2(2^{x+1} - 3)$.

68. Решить уравнения:

- а) $\log_3^2 x = 4 - 3\log_3 x$;
б) $\frac{1}{2}\lg(2x - 1) = 1 - \lg\sqrt{x - 9}$;
в) $\log_3\sqrt{x - 5} + \log_3\sqrt{2x - 3} = 1$;
г) $3\lg^2(x - 1) - 10\lg(x - 1) + 8 = 0$.

69. Какие решения имеет неравенство $\log_a x > \log_a b (b > 0)$, если:

- а) $a > 1$;
б) $0 < a < 1$?

70. Какие решения имеет неравенство $\log_a x < \log_a b (b > 0)$, если:

- а) $a > 1$;
б) $0 < a < 1$?

71. Решить неравенства:

- а) $\log_2 x > 1$;
б) $\log_3 x > -1$;
в) $\lg x < 2$;
г) $\log_9 x < 0$;
д) $\log_2 x > 0$;
е) $\lg x < -2$;
ж) $\log_{0,2} x > 1$;
з) $\log_{0,3} x > -1$;
и) $\log_{0,1} x < 2$;
к) $\log_{0,6} x \geq -1$;
л) $\log_{0,7} x \geq 0$;
м) $\log_{0,5} x \leq 0$.

72. Решить неравенства:

- а) $5\log_2 x > 20$;
б) $-4\log_5 x < -12$;
в) $3\log_7 x \geq 6$;
г) $3\log_{0,2} x > -6$;
д) $-6\log_{0,5} x < -6$;
е) $-3\log_{0,25} x \leq 6$.

73. Решить неравенства:

- а) $\log_2(3x - 5) > 3$;
б) $\log_5(2x - 1) < -1$;
в) $\log_7(5x - 4) \geq 0$;
г) $\log_{0,2}(3x - 4) > -1$;
д) $\log_{0,5}(x - 4) < 1$;
е) $\log_{0,25}(x - 3) \leq -1$;
ж) $\log_{1,7}(1 - 3x) < 0$;
з) $\log_{\frac{1}{7}}(2x - 1) > -1$;
и) $\log_{\sqrt{3}-1}(5 - 2x) > 2$;
к) $\log_{\sqrt{7}-1}(3 - 2x) < 2$;

$$\text{л) } \log_4 \frac{5-x}{x-2} > 1;$$

$$\text{н) } \log_5 \frac{3x-2}{x^2+1} > 0;$$

$$\text{м) } \log_5 \frac{3-x}{x+2} > 1;$$

$$\text{о) } \log_{\frac{1}{2}} \frac{2x^2+3}{x-7} < 0.$$

74. Решить неравенства:

$$\text{а) } \log_4(x^2 - 3x) < 3;$$

$$\text{в) } \log_{0,5}(x^2 + 7x) \geq -3;$$

$$\text{д) } \log_{0,5}(x^2 + 3x) \leq -1;$$

$$\text{б) } \log_6(x^2 + 35x) > 2;$$

$$\text{г) } \log_3(x^2 + 2x) > 1;$$

$$\text{е) } \log_{0,5}(x^2 - 1) \geq -2.$$

75. Решить неравенства:

$$\text{а) } \log_2(x^2 - x - 4) < 3;$$

$$\text{в) } \log_5(x^2 - 2x - 3) < 1;$$

$$\text{д) } \log_3(x^2 + 7x - 5) > 1;$$

$$\text{ж) } \log_{\frac{1}{7}}(x^2 - 4x - 5) \geq -1;$$

$$\text{б) } \lg(x^2 - x + 8) \geq 1;$$

$$\text{г) } \lg(x^2 - 8x + 13) > 0;$$

$$\text{е) } \log_6(x^2 - 3x + 2) \geq 1;$$

$$\text{з) } \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x - 6) \geq -3.$$

76. Решить неравенства:

$$\text{а) } \lg(3x - 4) < \lg(2x + 1);$$

$$\text{в) } \log_3(5 - 4x) < \log_3(x - 1);$$

$$\text{д) } \log_5(2x + 1) \geq \log_5(x - 3);$$

$$\text{ж) } \log_2(x - 1) \leq \log_2(2x + 3).$$

$$\text{б) } \log_{\frac{1}{2}}(2x + 3) > \log_{\frac{1}{2}}(x + 1);$$

$$\text{г) } \log_{0,3}(2x + 5) \geq \log_{0,3}(x + 1);$$

$$\text{е) } \log_{\frac{1}{3}}(3x - 1) > \log_{\frac{1}{3}}(2x + 3);$$

77. Решить неравенства:

$$\text{а) } \log_{0,2}^2 x - 5 \log_{0,2} x < -6;$$

$$\text{б) } \log_{0,1}^2 x + 3 \log_{0,1} x > 4.$$

Тригонометрические уравнения и неравенства

78. Решить уравнения:

$$\text{а) } \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{в) } \sin x = -\frac{1}{2};$$

$$\text{д) } \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\text{ж) } \sin x = \frac{4}{3};$$

$$\text{и) } \sin x = -1.$$

$$\text{б) } \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\text{г) } \sin x = \frac{1}{2};$$

$$\text{е) } \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{з) } \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

79. Решить уравнения:

а) $\sqrt{2} \sin x + 1 = 0$;

в) $2 \sin x + \sqrt{5} = 0$;

б) $3 \sin x - 3 = 0$;

г) $2 \sin x + \sqrt{2} = 0$.

80. Решить уравнения:

а) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

д) $\cos x = -1$;

ж) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

и) $\cos x = -1$.

б) $\cos x = \frac{1}{2}$;

г) $\cos x = -\frac{1}{2}$;

е) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

з) $\cos x = -1,1$;

81. Решить уравнения:

а) $2 \cos x + \sqrt{3} = 0$;

в) $2 \cos x = 0$;

б) $2 \cos x + \sqrt{2} = 0$;

г) $2 \cos x - 1 = 0$.

82. Решить уравнения:

а) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

в) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$;

д) $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$;

б) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$;

г) $\operatorname{tg} x = 1$;

е) $\operatorname{tg} x = -1$.

83. Решить уравнения:

а) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$;

в) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$;

д) $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

б) $\operatorname{ctg} x = -1$;

г) $\operatorname{ctg} x = 1$;

е) $\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

84. Решить уравнения:

а) $\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$;

в) $\sqrt{3} \operatorname{tg} x - 1 = 0$;

б) $\operatorname{ctg} x + 1 = 0$;

г) $\sqrt{3} \operatorname{ctg} x - 1 = 0$.

85. Решить уравнения:

а) $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\sin \frac{x}{4} = \frac{1}{2}$;

б) $\cos \frac{x}{3} = -\frac{1}{2}$;

г) $\cos 4x = 0$.

86. Решить уравнения:

а) $2\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$;

в) $2\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$;

б) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=3$;

г) $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)-1=0$.

87. Решить уравнения:

а) $\sqrt{2}\sin 3x+1=2$;

в) $2\cos 4x+1=0$;

б) $2\sin 2x+\sqrt{3}=0$;

г) $2\cos 2x-\sqrt{3}=0$.

88. Решить уравнения:

а) $3\sin\frac{x}{4}+1=4$;

в) $6\cos\frac{x}{2}-6=0$;

д) $1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0$;

б) $2\sin\frac{x}{3}+4=4$;

г) $2\cos\frac{x}{4}-2=0$;

е) $\operatorname{tg}\frac{x}{3}-5=5$.

89. Решить уравнения:

а) $\sin^2 x=\frac{1}{2}$;

в) $\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{2}$;

б) $\cos^2 x=\frac{1}{9}$;

г) $\operatorname{ctg}^2 x=3$.

90. Решить уравнения:

а) $\sin^2 x+\sin x-2=0$;

в) $2\cos^2 x-\cos x-1=0$;

д) $\operatorname{tg}^2 x-3\operatorname{tg} x-4=0$;

ж) $\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg} x+1=0$;

и) $2\sin^2 x+3\sin x+1=0$;

л) $2\sin^2 x-\sin x-1=0$;

н) $2\cos^2 x-3\cos x+1=0$;

п) $6\cos^2 x+\cos x-1=0$.

б) $2\sin^2 x+\sin x-1=0$;

г) $2\sin^2 x+\sin x-6=0$;

е) $2\cos^2 x+\cos x-6=0$;

з) $3\sin^2 x-5\sin x-2=0$;

к) $2\cos^2 x+3\cos x+1=0$;

м) $2\sin^2 x-3\sin x+1=0$;

о) $3\operatorname{tg}^2 x+2\operatorname{tg} x-1=0$;

91. Решить уравнения:

а) $2\sin x+\cos x=0$;

б) $\sqrt{3}\cos x+\sin x=0$.

92. Решить уравнение $\operatorname{tg}^2 x+5\operatorname{tg} x+6=0$ и найти все его корни, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$.

93. Решить уравнение $2\sin^2 x - 2\cos 2x - \sin 2x = 0$ и найти все его корни, принадлежащие отрезку $\left[-6\pi; -\frac{9\pi}{2}\right]$.

94. Решить уравнение $-\sqrt{2}\sin\left(-\frac{5\pi}{2} + x\right) \cdot \sin x = \cos x$ и найти все его корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{9\pi}{2}; 6\pi\right]$.

95. Решить уравнение $\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = \sqrt{2}\sin x$ и найти его корни, принадлежащие отрезку $[-5\pi; -4\pi]$.

96. Решить уравнение $(2\sin x - 1)(\sqrt{-\cos x} + 1) = 0$.

97. Решить уравнение $\operatorname{tg}^2 x + (1 + \sqrt{3})\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$ и найти его корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

98. Решить уравнение $8 \cdot 16^{\cos x} - 6 \cdot 4^{\cos x} + 1 = 0$ и найти его корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

99. Решить уравнение $0,4^{4^{\sin x}} + 2,5^{5^{\sin x}} = 2$ и найти его корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

100. Решить уравнение $15^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot 5^{\sin x}$ и найти его корни, принадлежащие отрезку $\left[5\pi; \frac{13\pi}{2}\right]$.

101. Решить уравнение $4^{\sin x} + 4^{-\sin x} = \frac{5}{2}$ и найти его корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

102. Решить уравнение $2\log_2^2(2\cos x) - 9\log_2(2\cos x) + 4 = 0$ и найти его корни, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

103. Решить уравнение $\log_{13}(\cos 2x - 9\sqrt{2}\cos x - 8) = 0$ и найти его корни, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

104. Решить уравнение $\log_4(2^{2x} - \sqrt{3} \cos x - \sin 2x) = x$ и найти его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

105. Решить неравенства:

а) $\sin x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\sin x \leq \frac{1}{2}$;

в) $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$;

г) $\sin x \leq -\frac{1}{2}$;

д) $\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

е) $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$;

ж) $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

з) $\sin x > \frac{1}{2}$;

и) $\sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

106. Решить неравенства:

а) $\cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\cos x > 0$;

в) $\cos x < -\frac{1}{2}$;

г) $\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

д) $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$;

е) $\cos x \leq \frac{1}{2}$;

ж) $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

з) $\cos t > -\frac{1}{2}$;

и) $\cos t > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

107. Решить неравенства:

а) $\operatorname{tg} x > -1$;

б) $\operatorname{tg} x > -\frac{1}{\sqrt{3}}$;

в) $\operatorname{tg} x \leq 1$;

г) $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$;

д) $\operatorname{tg} x > -\sqrt{3}$;

е) $\operatorname{tg} x < \frac{1}{\sqrt{3}}$;

ж) $\operatorname{tg} x < \sqrt{3}$;

з) $\operatorname{tg} x > \frac{1}{\sqrt{3}}$;

и) $\operatorname{tg} x < -1$.

108. Решить неравенства:

а) $\operatorname{ctgx} > -\frac{1}{\sqrt{3}}$; б) $\operatorname{ctgx} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$;
в) $\operatorname{ctgx} < 1$; г) $\operatorname{ctgx} > -1$;
д) $\operatorname{ctgx} < -\sqrt{3}$; е) $\operatorname{ctgx} < \sqrt{3}$.

109. Решить неравенства:

а) $\sin 2x < \frac{1}{2}$; б) $\cos \frac{t}{2} > \frac{\sqrt{3}}{2}$;
в) $\sin \frac{x}{2} < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\operatorname{tg} 5x > 1$.

110. Решить неравенства:

а) $\sin x \cos \frac{\pi}{6} - \cos x \sin \frac{\pi}{6} < \frac{1}{2}$; б) $\cos \frac{\pi}{8} \cos x - \sin x \sin \frac{\pi}{8} < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

111. Отметить на единичной окружности точки, для которых соответствующее значение t удовлетворяет данному неравенству. Найти множество значений t , удовлетворяющих указанному промежутку.

а) $\sin t > \frac{1}{2}, t \in [0; \pi]$; б) $\sin t < -\frac{\sqrt{3}}{2}, t \in [-\pi; 0]$;
в) $\sin t > \frac{\sqrt{2}}{2}, t \in [0; \pi]$; г) $\sin t < -\frac{1}{2}, t \in [-\pi; 0]$.

112. Отметить на единичной окружности точки, для которых соответствующее значение t удовлетворяет данному неравенству. Найти множество значений t , удовлетворяющих указанному промежутку.

а) $\cos t > \frac{\sqrt{2}}{2}, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; б) $\cos t < -\frac{1}{2}, t \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$;
в) $\cos t > \frac{1}{2}, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; г) $\cos t < -\frac{\sqrt{3}}{2}, t \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

113. Отметить на единичной окружности точки, для которых соответствующее значение t удовлетворяет данному неравенству. Найти множество значений t , удовлетворяющих указанному промежутку.

а) $\operatorname{tg} t > -\sqrt{3}, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; б) $\operatorname{tg} t > -1, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Системы уравнений

114. Решить систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x + 2y = 11, \\ xy = 14; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x - y = 2, \\ xy = 15; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x - y = 6, \\ xy = 16; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} x + y = 5, \\ x - y^2 = 3. \end{cases}$$

Решить систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{1}{x+5y} + y = 2, \\ \frac{y}{x+5y} = 1; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} xy - x + y = 5, \\ x^2y - xy^2 = -6; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \frac{1}{x+2y} - x = 2, \\ \frac{x}{x+2y} = -1; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} xy + x - y = 3, \\ x^2y - xy^2 = 2. \end{cases}$$

115. Решить систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x + xy + y = -1, \\ x^2 + xy + y^2 = 3; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x - xy + y = 1, \\ x^2 + y^2 + x + y = 2; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 3x^2 - 5xy + 4y^2 = 2, \\ x^2 - xy + 3y^2 = 3; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 = 9, \\ 3x^2 - xy + y^2 = 5. \end{cases}$$

116. Решить систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x^3 + y^3 = 26, \\ x + y = 2; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} xy - x = 3, \\ xy^3 - xy^2 = 12; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x^3 - y^3 = 9, \\ x - y = 3; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ x^2 - xy = 6. \end{cases}$$

117. Решить систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} (x+3)(y-2) = x^2 + 2x - 3, \\ x^2 - y^2 + 4x + 19 = 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x^2 + xy + x = 8, \\ y^2 + xy + y = 4; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} (x-5)(y+3) = x^2 - 3x - 10, \\ 2x^2 - xy + 5y - 11 = 0; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} x^2 = -7x - 2y, \\ y^2 = 3x + 4y. \end{cases}$$

118. Решить систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x + y = 5, \\ 4^x + 4^y = 80; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 4^{x+y} = 128, \\ 5^{3x-2y-3} = 1; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 5^{x+y} = 125, \\ 4^{(x-y)^2-1} = 1; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} 5^{x+y} = 125, \\ 4^{(x-y)^2-1} = 1. \end{cases}$$

119. Решить систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 2^{x-y} = 4^y, \\ \frac{6}{x} + \frac{1}{5y} = 1; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 8 \cdot 2^y = 4^{1,5x+0,5}, \\ 5^{2x} = \frac{1}{25} \cdot 5^y; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 27^x = 3^{7-y}, \\ \frac{1}{x} + 2 = \frac{10}{y}; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} \frac{3^y}{27} = \left(\frac{1}{9}\right)^{0,5-x}, \\ (\sqrt{2})^{2x} = 2^{y-3,5}. \end{cases}$$

120. Решить систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 2^{x-y} \cdot 2^{xy} = 8, \\ 9^y = 3^{4-x}; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 2^{x-y} = 4^y, \\ \frac{6}{x} + \frac{1}{5y} = 1; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{3^{x-y}}{3^{xy}} = \frac{1}{3}, \\ 2^x \cdot 2^y = 32; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} 27^x = 3^{7-y}, \\ \frac{1}{x} + 2 = \frac{10}{y}. \end{cases}$$

121. Решить систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 8 \cdot 2^y = 4^{1,5x+0,5}, \\ 5^{2x} = \frac{1}{25} \cdot 5^y; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 2^{x-y} \cdot 2^{xy} = 8, \\ 9^y = 3^{4-x}; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{3^y}{27} = \left(\frac{1}{9}\right)^{0,5-x}, \\ (\sqrt{2})^{2x} = 2^{y-3,5}; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} \frac{3^{x-y}}{3^{xy}} = \frac{1}{3}, \\ 2^x \cdot 2^y = 32. \end{cases}$$

122. Решить систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \log_3(x-y) = 1, \\ \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - y^2) = -3; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0, \\ x^2 - 2y^2 - 8 = 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \log_2(x-y) = 1, \\ \log_{\frac{1}{2}}(x+y) = 1; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 1, \\ \log_2(xy) = 3. \end{cases}$$

123. Решить систему уравнений:

$$\text{a) } \begin{cases} \lg x + \lg y = \lg 6, \\ x^2 + y^2 = 13; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \lg x + \lg y = \lg 5, \\ x^2 + y^2 = 26. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \lg x + \lg y = \lg 4, \\ x^2 + y^2 = 17; \end{cases}$$

124. Решить систему уравнений:

$$\text{a) } \begin{cases} \sqrt{x} + y = 5, \\ 2\sqrt{x} - y = -2; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \sqrt{x} + y = 5, \\ 2\sqrt{x} - y = -2; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \sqrt{x} - y = 5, \\ -6 + \sqrt{x} \cdot y = 0; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} \sqrt{x} - y = 5, \\ -6 + \sqrt{x} \cdot y = 0. \end{cases}$$

125. Решить систему уравнений:

$$\text{a) } \begin{cases} \sqrt{x+y-1} = 1, \\ \sqrt{y-x+2} = 2x-2; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = \frac{35}{36}xy, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = y-x. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{\sqrt{x}}{y} + \frac{\sqrt{y}}{x} = \frac{35}{36}, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = y-x; \end{cases}$$

126. Решить систему уравнений:

$$\text{a) } \begin{cases} \sqrt{x-y+3} = 2, \\ \sqrt{y-x+10} = y+1; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \sqrt{x+y+4} = x-y, \\ \sqrt{2x+y} = \sqrt{3x-3y}; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \sqrt{2x-3y} = 1, \\ \sqrt{2y-3x+10} = y-2; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} \sqrt{x+y+4} = y-x, \\ \sqrt{x+y} = \sqrt{2x-3y}. \end{cases}$$

127. Решить систему уравнений:

$$\text{a) } \begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 1, \\ 3^{x-y} = \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{2}{3}}; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2x+1} = 32, \\ \log_4(x-6)^2 = 1; \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} \frac{2^{4x+2}}{4^{x+1}} = 1, \\ 1 + \log_3(x-4) = \log_3(x+21). \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2^{x-y} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}, \\ \log_2 x + \log_2 y = 2; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} 3^{2x-6} = \frac{1}{27}, \\ \log_3(1-x)^2 = 2; \end{cases}$$

128. Решить графически систему уравнений:

$$\begin{array}{l} \text{а) } \begin{cases} xy = 6, \\ 2x - 3y = 6; \end{cases} \\ \text{в) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = \frac{1}{2}x^2 + 2. \end{cases} \end{array}$$

$$\text{б) } \begin{cases} y - x - 1 = 0, \\ x^2 + y^2 - 1 = 0; \end{cases}$$

129. Решить систему уравнений:

$$\begin{array}{l} \text{а) } \begin{cases} \frac{27^x}{3^{x-7}} = 9, \\ \log_{0,5}(x+16) = \log_{0,5}(x+2) - 1; \end{cases} \\ \text{в) } \begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 1, \\ 3^{x-y} = \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{2}{3}}; \end{cases} \\ \text{д) } \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2x+1} = 32, \\ \log_4(x-6)^2 = 1; \end{cases} \\ \text{ж) } \begin{cases} \frac{27^x}{3^{x-7}} = 9, \\ \log_{0,5}(x+16) = \log_{0,5}(x+2) - 1. \end{cases} \end{array}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{2^{4x+2}}{4^{x+1}} = 1, \\ 1 + \log_3(x-4) = \log_3(x+21); \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} 2^{x-y} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}, \\ \log_2 x + \log_2 y = 2; \end{cases}$$

$$\text{е) } \begin{cases} 3^{2x-6} = \frac{1}{27}, \\ \log_3(1-x)^2 = 2; \end{cases}$$

ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

Задачи на движение

130. Собственная скорость теплохода 27 км/ч, скорость течения реки 3 км/ч. Сколько времени затратит теплоход на путь по течению реки между двумя причалами, если расстояние между ними 120 км?

131. Сколько времени потребуется для того, чтобы проплыть на моторной лодке 90 км против течения, если ее собственная скорость 20 км/ч, а скорость течения реки 2 км/ч?

132. Катер, имеющий собственную скорость 15 км/ч, проплыл 2 ч по течению реки и 3 ч против течения. Какое расстояние проплыл катер за все время, если скорость течения реки 2 км/ч?

133. Расстояние между причалами 24 км. Сколько времени потратит моторная лодка на путь между причалами туда и обратно, если собственная скорость моторной лодки 10 км/ч, а скорость течения 2 км/ч?

134. Расстояние между двумя причалами 36 км. Сколько времени потратит на путь от одного причала до другого и обратно катер, если его собственная скорость 15 км/ч, а скорость течения реки 3 км/ч?

135. По течению моторная лодка проплыла 48 км за 3 ч, а против течения – за 4 ч. Найти скорость течения.

136. Моторная лодка прошла против течения реки 112 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 6 часов меньше. Найти скорость течения, если скорость лодки в неподвижной воде равна 11 км/ч. Ответ дать в км/ч.

137. Моторная лодка прошла против течения реки 255 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше. Найти скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 1 км/ч. Ответ дать в км/ч.

138. Моторная лодка в 10:00 вышла из пункта A в пункт B , расположенный в 30 км от A . Пробыв в пункте B 2 часа 30 минут, лодка отправилась назад и вернулась в пункт A в 18:00 того же дня. Определить (в км/ч) собственную скорость лодки, если известно, что скорость течения реки 1 км/ч.

139. Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 200 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найти скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 15 км/ч, стоянка длится

10 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 40 часов после отплытия из него. Ответ дать в км/ч.

140. Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 255 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найти скорость теплохода в неподвижной воде, если скорость течения равна 1 км/ч, стоянка длится 2 часа, а в пункт отправления теплоход возвращается через 34 часа после отплытия из него. Ответ дать в км/ч.

141. Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 247 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найти скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 16 км/ч, стоянка длится 7 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 39 часов после отплытия из него. Ответ дать в км/ч.

142. От пристани A к пристани B , расстояние между которыми равно 110 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 1 час после этого следом за ним со скоростью на 1 км/ч большей отправился второй. Найти скорость второго теплохода, если в пункт B он прибыл одновременно с первым. Ответ дать в км/ч.

143. Из пункта A в пункт B одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 24 км/ч, а вторую половину пути – со скоростью, на 16 км/ч большей скорости первого, в результате чего прибыл в пункт B одновременно с первым автомобилем. Найти скорость первого автомобиля. Ответ дать в км/ч.

144. Из пункта A в пункт B одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 13 км/ч, а вторую половину пути – со скоростью 78 км/ч, в результате чего прибыл в пункт B одновременно с первым автомобилем. Найти скорость первого автомобиля, если известно, что она больше 48 км/ч. Ответ дать в км/ч.

145. Из пункта A в пункт B , расстояние между которыми 75 км, одновременно выехали автомобилист и велосипедист. Известно, что за час автомобилист проезжает на 40 км больше, чем велосипедист. Определить скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт B на 6 часов позже автомобилиста. Ответ дать в км/ч.

146. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города A в город B , расстояние между которыми равно 70 км. На следующий день он отправился обратно в A со скоростью на 3 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 3 часа. В результате велосипедист затратил на обратный

путь столько же времени, сколько на путь из A в B . Найти скорость велосипедиста на пути из B в A . Ответ дать в км/ч.

147. Два велосипедиста одновременно отправились в 240-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 1 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 1 час раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым. Ответ дайте в км/ч.

148. Из двух городов, расстояние между которыми равно 560 км, навстречу друг другу одновременно выехали два автомобиля. Через сколько часов автомобили встретятся, если их скорости равны 65 и 75 км/ч?

149. Товарный поезд каждую минуту проезжает на 750 метров меньше, чем скорый, и на путь в 180 км тратит времени на 2 часа больше, чем скорый. Найти скорость товарного поезда. Ответ дать в км/ч.

150. Два пешехода отправляются одновременно в одном направлении из одного и того же места на прогулку по аллее парка. Скорость первого на 1,5 км/ч больше скорости второго. Через сколько минут расстояние между пешеходами станет равным 300 метрам?

Задачи на совместную работу

151. Заказ на изготовление 110 деталей первый рабочий выполняет на 1 час быстрее, чем второй. Сколько деталей за час изготавливает второй рабочий, если известно, что первый за час изготавливает на 1 деталь больше?

152. Заказ на изготовление 156 деталей первый рабочий выполняет на 1 час быстрее, чем второй. Сколько деталей за час изготавливает первый рабочий, если известно, что он за час изготавливает на 1 деталь больше второго?

153. На изготовление 475 деталей первый рабочий тратит на 6 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 550 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 3 детали больше, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий?

154. На изготовление 99 деталей первый рабочий тратит на 2 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 110 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 1 деталь больше, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий?

155. Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 12 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за два дня выполняет такую же часть работы, какую второй – за три дня?

156. Первая труба пропускает на 1 литр воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 110 литров она заполняет на 1 минуту дольше, чем вторая труба?

157. Первая труба пропускает на 1 литр воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 110 литров она заполняет на 2 минуты дольше, чем вторая труба заполняет резервуар объемом 99 литров?

158. Первая труба пропускает на 5 литров воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объемом 375 литров она заполняет на 10 минут быстрее, чем первая труба заполняет резервуар объемом 500 литров?

159. Первая труба наполняет резервуар на 6 минут дольше, чем вторая. Обе трубы наполняют этот же резервуар за 4 минуты. За сколько минут наполняет этот резервуар одна вторая труба?

160. Первый и второй насосы наполняют бассейн за 9 минут, второй и третий – за 14 минут, а первый и третий – за 18 минут. За сколько минут эти три насоса заполнят бассейн, работая вместе?

Задачи на составление квадратного уравнения

161. В книжке 60 страниц. Прочитали в 2 раза больше страниц, чем осталось прочитать. Сколько страниц осталось прочитать?

162. На автомобильной стоянке стоит 72 автомобиля, причем легковых автомобилей в 7 раз больше, чем грузовых. Сколько грузовых автомобилей на автостоянке?

163. У хозяйки было 20 кур и цыплят. Кур было в 4 раза меньше, чем цыплят. Сколько цыплят было у хозяйки?

164. Кусок полотна в 124 м надо разрезать на две части так, чтобы длина одной части была на 12 м больше, чем другой. По сколько метров полотна будет в каждой части?

165. Двое должны поделить между собой 15 руб. так, чтобы одному досталось на 4 руб. больше, чем другому. Сколько достанется каждому?

166. Огородный участок, имеющий форму прямоугольника, одна из сторон которого на 10 м больше другой, требуется обнести изгородью. Определить длину изгороди, если известно, что площадь участка равна 1200 м^2 .

167. Высота прямоугольника составляет 75 % его основания. Найти периметр этого прямоугольника, зная, что площадь прямоугольника равна 48 м^2 .

168. От нити, равной периметру некоторого квадрата, отрезано с одного конца 36 см. Укороченная таким образом нить представляет периметр другого квадрата, площадь которого в 2,25 раза меньше площади первого. Определить первоначальную длину нити.

169. От листа жести, имеющего форму квадрата, отрезали полосу шириной в 3 см, после чего площадь оставшейся части листа стала равна 10 см^2 . Определить первоначальные размеры листа жести.

170. Колхоз должен был засеять 200 га к определенному сроку, но он засеивал ежедневно на 5 га больше, чем намечалось по плану, и поэтому закончил сев на 2 дня раньше срока. За сколько дней закончен сев?

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Основные понятия комбинаторики. Задачи на подсчет числа размещений, перестановок, сочетаний. Решение задач на перебор вариантов. Формула бинома Ньютона. Свойства биномиальных коэффициентов. Треугольник Паскаля.

Событие, вероятность события, сложение и умножение вероятностей. Понятие о независимости событий. Дискретная случайная величина, закон ее распределения. Числовые характеристики дискретной случайной величины. Понятие о законе больших чисел.

Представление данных (таблицы, диаграммы, графики), генеральная совокупность, выборка, среднее арифметическое, медиана. Понятие о задачах математической статистики.

Решение практических задач с применением вероятностных методов.

171. Вычислить следующие значения:

- а) A_7^1 ; б) A_5^1 ; в) A_5^2 ; г) A_4^2 ;
д) A_7^7 ; е) A_6^6 ; ж) A_{10}^3 ; з) A_8^3 .

172. Учащемуся необходимо сдать 4 экзамена на протяжении 8 дней. Сколькими способами это можно сделать?

173. Трудовой коллектив из 31 человека должен выбрать руководителя и его заместителя. Сколько существует способов их выбора, если каждый член коллектива может быть либо руководителем, либо его заместителем?

174. Сколькими способами можно обозначить данный вектор, используя буквы A, B, C, D, E, F ?

175. Сколько существует способов для обозначения с помощью букв A, B, C, D, E, F вершин данного:

- а) квадрата;
б) треугольника?

176. В классе изучают 8 предметов естественно-математического цикла. Сколькими способами можно составить расписание на пятницу, если в этот день должны быть:

- а) 5 уроков из пяти разных предметов этого цикла;
б) 6 уроков из шести разных предметов этого цикла?

177. В финале 8 команд. Разыгрываются три медали. Сколько существует вариантов в распределении медалей?

178. При расследовании хищения установлено, что у преступника семизначный телефонный номер, в котором ни одна цифра не повторяется и нет нуля. Следователь, полагая, что перебор этих номеров потребует одного-двух часов, доложил о раскрытии преступления. Прав ли он?

179. Вычислить следующие значения:

- а) P_4 ; б) P_5 ; в) P_6 ; г) P_7 .

180. Сколькими способами можно рассадить пятерых детей на пяти стульях в столовой детского сада?

181. Сколькими способами могут занять места 6 учащихся класса за шестью одноместными партами?

182. Замок сейфа открывается, если введена правильная комбинация. Преступник пытается открыть сейф, набирая код наудачу. Он знает, что код состоит из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 при условии, что все числа не повторяются и последней является 5. Сколько попыток ему придется сделать?

183. В соревновании участвовало 8 команд. Сколько существует вариантов в распределении мест между ними?

184. Сколькими способами можно установить дежурство по одному человеку в день:

- а) среди 6 учащихся класса в течение 6 дней;
б) среди 5 учащихся класса в течение 5 дней;
в) среди 7 учащихся класса в течение 7 дней?

185. Сколько различных пятизначных чисел, не содержащих одинаковых цифр, можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5 так чтобы:

- а) последней была цифра 3;
б) первой была цифра 4;
в) первой была цифра 5, а второй – цифра 1;
г) первой была цифра 2, а последней – цифра 4;
д) первыми были цифры 3 и 4, расположенные в любом порядке;
е) последними были цифры 1 и 2, расположенные в любом порядке?

186. Сколько различных слов можно составить, переставляя местами буквы в слове:

- а) медиана;
б) окружность?

187. Сколько различных шестизначных чисел, не содержащих одинаковых цифр и кратных 5, можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5 и 6?

188. Сколько различных шестизначных чисел, не содержащих одинаковых цифр и кратных 4, можно записать с помощью цифр 1, 3, 5, 6, 7 и 9?

189. Имеются 8 книг, среди которых:

а) 6 книг различных авторов и двухтомник одного автора, книг которого не было среди предыдущих шести книг;

б) 5 книг различных пяти авторов и трехтомник шестого автора.

Сколькими способами можно расставить эти книги на полке так, чтобы книги одного автора стояли рядом?

190. Найти значение выражений:

а) $\frac{26!}{25!}$; б) $\frac{32!}{31!}$; в) $\frac{12!}{10!}$; г) $\frac{14!}{12!}$;
д) $\frac{5! \cdot 3!}{7!}$; е) $\frac{6! \cdot 4!}{8!}$; ж) $\frac{10!}{8! \cdot 3!}$; з) $\frac{11!}{9! \cdot 2!}$.

191. Упростить выражения (буквами n и m обозначены натуральные числа):

а) $\frac{P_{n+1}}{P_n}$; б) $\frac{P_{n+2}}{P_{n+1}}$; в) $\frac{m!(m+1)}{(m+2)!}$; г) $\frac{(m+3)!}{(m+1)!(m+2)!}$.

192. Решить уравнение относительно n :

а) $\frac{P_n}{P_{n+1}} = \frac{1}{4}$; б) $\frac{P_{n+2}}{P_{n+1}} = 5$; в) $\frac{P_n}{P_{n-2}} = 20$; г) $\frac{P_{n-1}}{P_{n+1}} = \frac{1}{12}$.

193. Вычислить следующие значения:

а) C_7^1 ; б) C_6^1 ; в) C_8^2 ; г) C_7^2 ;
д) C_7^3 ; е) C_8^3 ; ж) C_9^8 ; з) C_{10}^9 ;
и) C_{15}^{15} ; к) C_{12}^{12} ; л) C_{30}^0 ; м) C_{40}^0 .

194. Из группы, в которой учатся 20 человек, нужно выбрать двоих студентов для поездки на картошку. Сколькими способами это можно сделать?

195. У пиратов в трюме томятся 13 пленников. Сколько есть способов выбрать троих, чтобы отпустить на свободу?

196. В шахматном турнире участвовало 14 шахматистов, каждый из них сыграл с каждым по одной партии. Сколько всего сыграно партий?

197. В полуфинале 8 команд, в финал попадает только три из них. Сколько существует вариантов выхода команд в финал?

198. В штате прокуратуры областного центра имеется 16 следователей. Сколькими способами можно выбрать 2 из них для проверки оперативной информации о готовящемся преступлении?

210. Студент знает 40 вопросов из 50. В билете 2 вопроса. Найти вероятность того, что студент знает оба вопроса.

211. Из 10 деталей 6 стандартных. Какова вероятность того, что из 6 отобранных деталей 4 нестандартных?

212. Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 50. Найти вероятность того, что номер первого извлеченного наудачу жетона не содержит цифры 3.

213. В урне 6 белых и 5 черных шаров. Из урны вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что оба шара будут черными.

214. Найти вероятность того, что при бросании 3-х игральных костей сумма выпавших очков равна 9.

215. Служебный телефон имеет номер из 3-х цифр. Какова вероятность, не зная номера, набрать его правильно, если известно, что сумма цифр делится на 3?

216. В партии, состоящей из 20 изделий, имеется 5 дефектных. Из партии выбирается для контроля 3 изделия. Найти вероятность того, что из них ровно 2 будут дефектными.

217. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди них будут 5 отличников.

218. Вероятность получить отличную оценку на первом экзамене равна 0,1; на втором – 0,2; на третьем – 0,6. Какова вероятность стать отличником?

219. Производится залп из трех орудий. Вероятность попадания из первого орудия равна 0,9; из второго – 0,4; из третьего – 0,8. Найти вероятность того, что будет только два попадания в цель.

220. Подбрасывают три искривленные монеты. Вероятность выпадения герба на первой – 0,2; на второй – 0,8; на третьей – 0,6. Найти вероятность того, что выпадет хотя бы один герб.

221. Вероятность повышения цен в декабре равна 0,1; в январе – 0,9, в феврале – 0,3. Найти вероятность того, что в течение зимы повышение цен будет только в одном месяце.

222. Вероятность погашения долга в установленный срок предприятием № 1 равна 0,9; предприятием № 2 – 0,6; предприятием № 3 – 0,7. Какова вероятность того, что точно два предприятия из трех погасят долг в установленный срок. Погашение долгов рассматривать как независимые события.

223. Вероятность выплаты дивидендов за текущий год для первого предприятия равна 0,3; для второго предприятия равна 0,2, для третьего – 0,08. Какова вероятность того, что хотя бы одно предприятие выплатит дивиденды? Выплаты дивидендов рассматривать как независимые события.

224. Для некоторого студента вероятность не сдать в сессию первый экзамен равна 0,3; второй – 0,2; третий – 0,1. Какова вероятность сдать сессию без задолженностей?

225. Три спортсмена идут на выполнение нормативов мастера спорта. Вероятность того, что первый выполнит норматив, – 0,8; второй – 0,9; третий – 0,6. Найти вероятность того, что только один выполнит норматив.

226. Производится залп из трех орудий. Вероятность попадания из первого орудия равна 0,5; из второго – 0,6; из третьего – 0,9. Найти вероятность того, что будет только два попадания в цель.

227. От аэровокзала отправились 3 автобуса-экспресса к трапам самолетов. Вероятность своевременного прибытия первого – 0,9; второго – 0,8; третьего – 0,9. Найти вероятность того, что хотя бы один автобус прибудет вовремя.

228. Составить закон распределения для следующих случайных величин:

а) сумма очков, выпавших при одном подбрасывании двух шестигранных игральных костей;

б) количество красных шаров среди трех шаров, вынутых наудачу из коробки, в которой 3 красных и 3 белых шара;

в) количество попаданий в мишень при четырех выстрелах при условии, что вероятность попадания в мишень при одном любом выстреле равна 0,8;

г) количество вынутых белых шаров (до появления красного шара) из коробки, в которой 4 белых и 2 красных шара;

д) цена изделия, взятого наудачу из коробки, в которой 3 изделия по цене 5 руб., 5 изделий по цене 10 руб., 2 изделия по цене 15 руб.;

е) сумма номеров 2-х шаров, взятых наудачу из 5 шаров с номерами от 1 до 5;

ж) количество оплаченных в срок векселей из 5 при условии, что вероятность оплаты в срок одного векселя равна 0,6;

з) количество попаданий в мишень при одном залпе четырех стрелков, при условии, что вероятность попадания в цель каждым стрелком соответственно равна 0,4; 0,5; 0,6; 0,7;

и) количество очков на взятой наугад одной пластинке домино из полного комплекта домино (28 пластинок);

к) общая стоимость двух изделий, взятых наугад из десяти изделий, если 3 изделия по цене 5 руб., 5 изделий по цене 10 руб., 2 по цене 15 руб.

229. Найти числовые характеристики дискретной случайной величины, заданной рядом распределения:

а)

x_i	-2	-1	0	2	4
p_i	0,15	0,1	0,25	0,2	0,3

б)

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,5	0,15	0,15	0,1	0,1

в)

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,3	0,15	0,25	0,1	0,2

г)

x_i	-4	-2	0	2	4
p_i	0,2	0,15	0,3	0,25	0,1

д)

x_i	-2	0	1	2	3
p_i	0,5	0,15	0,15	0,1	0,1

е)

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	0,35	0,15	0,2	0,1	0,2

ж)

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,6	0,1	0,1	0,1	0,1

з)

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,35	0,15	0,1	0,2	0,2

и)

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,15	0,15	0,15	0,4	0,15

к)

x_i	-2	-1	0	2	4
p_i	0,15	0,15	0,5	0,1	0,1

230. В команде баскетболистов игроки имеют рост (в см): 200, 192, 192, 200, 180, 200, 189, 192, 195, 190, 190, 192. Найти среднее арифметическое, моду и медиану.

231. Подсчитали объем продаж магазина в течение 10 дней (в тыс. руб.): 45, 39, 33, 37, 31, 29, 41, 41. Найти среднее арифметическое, моду и медиану.

232. Посещаемость сайта за вторую декаду месяца составила: 4 300, 4 000, 4 000, 4 100, 4 099, 4 600, 4 097, 4 100, 4 000, 4 200, 4 150. Найти среднее арифметическое, моду и медиану.

233. Напряжение в электрической сети за 13 измерений составило (вольт): 227, 214, 242, 223, 242, 223, 242, 220, 212, 241, 239, 223, 242. Найти среднее арифметическое, моду и медиану.

234. Скорость автомобилей, проезжавших перекресток, составила (км/ч): 50, 40, 38, 69, 32, 31, 52, 55, 32, 60, 40, 40. Найти среднее арифметическое, моду и медиану.

235. Студент выписал свои оценки по математике за семестр: 3, 4, 2, 3, 4, 4, 3, 2, 5, 4. Найти среднее арифметическое, моду и медиану.

236. В ассортименте магазина 13 видов конфет по ценам (руб.): 190, 200, 170, 180, 150, 190, 260, 209, 270, 154, 158, 150, 190. Найти среднюю цену, моду и медиану.

237. Автобус за 10 рейсов перевез пассажиров: 82, 162, 78, 56, 141, 106, 126, 130, 85, 106. Найти среднее арифметическое, моду и медиану.

238. За 7 дней расходы на питание семьи составили (в руб.): 445, 470, 326, 395, 290, 255, 255. Найти среднее арифметическое, моду и медиану.

239. Высота деревьев на аллее составляет (в метрах): 3,2; 2,5; 4,8; 2,2; 2,6; 12,8; 2,1; 3,1; 2,8; 3,1; 4,8; 3,5. Найти среднюю высоту деревьев, моду и медиану.

240. Дан статистический ряд распределения. Построить полигон частот и найти числовые характеристики ряда:

а)

x_i	-2	-1	0	2	4
n_i	15	10	25	20	30

б)

x_i	0	1	2	3	4
n_i	50	15	15	10	10

в)

x_i	0	1	2	3	4
n_i	30	15	25	20	10

г)

x_i	-4	-2	0	2	4
n_i	20	15	30	25	10

д)

x_i	-2	0	1	2	3
n_i	50	15	15	10	10

е)

x_i	-2	-1	0	1	2
n_i	35	15	20	10	20

ж)

x_i	0	1	2	3	4
n_i	60	10	10	10	10

з)

x_i	0	1	2	3	4
n_i	3	7	5	3	2

и)

x_i	0	1	2	3	4
n_i	6	7	3	3	1

к)

x_i	-2	-1	0	2	4
n_i	3	4	5	6	2

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Башмаков, М. И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия : учебник / М. И. Башмаков. – М.: ИЦ Академия, 2016. – 256 с.
2. Башмаков, М. И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия : учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / М. И. Башмаков. – 4-е изд., стер. – М. : Академия, 2017. – 253 с.
3. Гумеров, Р. М. Математика : метод. указания к выполнению контрольной работы / Р. М. Гумеров, З. Ш. Аглямова, Г. Р. Ерошкина. – Казань : Изд-во «Познание» Института экономики, управления и права, 2014. – 28 с.
4. Дадаян, А. А. Математика [Электронный ресурс] : учебник / А. А. Дадаян. – 3-е изд. – М. : Форум: НИЦ ИНФРА-М, 2018. – 544 с. – URL : <http://znanium.com/catalog/product/967862>
5. Канцедал, С. А. Дискретная математика [Электронный ресурс] : учеб. пособие / С. А. Канцедал. – М. : ИД ФОРУМ: НИЦ Инфра-М, 2018. – 222 с. – URL : <http://znanium.com/catalog/product/927464>

КРАТКИЙ СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Формулы сокращенного умножения

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b);$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2);$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2);$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Формула бинома Ньютона

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n a^0 b^n.$$

Линейное уравнение

$$ax + b = 0, a \neq 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}.$$

Линейные неравенства

$$\text{а) } ax + b > 0, a > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a};$$

$$\text{б) } ax + b > 0, a < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a};$$

$$\text{в) } ax + b < 0, a > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a};$$

$$\text{г) } ax + b < 0, a < 0 \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}.$$

Уравнение, содержащее модуль

$$\text{При } b \geq 0 \quad |f(x)| = b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = b, \\ f(x) = -b. \end{cases}$$

При $b < 0$ уравнение $|f(x)| = b$ решений не имеет.

Квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ где } a \neq 0,$$

$$D = b^2 - 4ac \text{ – дискриминант уравнения.}$$

При $D < 0$ – уравнение не имеет действительных корней;

при $D = 0$ – уравнение имеет единственный корень $x = \frac{-b}{2a}$;

при $D > 0$ – уравнение имеет два действительных корня $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

При $D > 0$ $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

По теореме Виета: $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$; $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$.

Решение простейших степенных уравнений

$$x^n = a$$

	$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
n – четное	$x_{1,2} = \pm \sqrt[n]{a} = \pm a^{\frac{1}{n}}$	$x = 0$	\emptyset
n – нечетное	$x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$		$x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

Степень и ее свойства

Если $x, y \in R$, $a > 0$, $b > 0$, то:

1. $a^0 = 1$.
2. $a^1 = a$.
3. $a^{-1} = \frac{1}{a}$.
4. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.
5. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.
6. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.
7. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$.
8. $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$.
9. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$.

Иррациональные уравнения

а) $\sqrt{f(x)} = a$.

Если $a < 0$, то корней нет.

Если $a \geq 0$, то $\sqrt{f(x)} = a \Leftrightarrow f(x) = a^2$.

б) $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g^2(x). \end{cases}$

$$в) \sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0, \end{cases} \text{ ИЛИ } \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Примечание. Из двух систем выбирают ту, которая решается проще.

$$г) \sqrt[3]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g^3(x).$$

Иррациональные неравенства

$$а) \sqrt{x} > a, a \geq 0 \Leftrightarrow x > a^2;$$

$$б) \sqrt{x} > a, a < 0 \Leftrightarrow x \geq 0;$$

$$в) \sqrt{x} < a, a > 0 \Leftrightarrow 0 \leq x < a^2;$$

$$г) \sqrt{x} < a, a \leq 0 \Leftrightarrow \emptyset;$$

$$д) \sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^2(x); \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \end{cases}$$

$$е) \sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^2(x). \end{cases} \end{cases}$$

Свойства арифметических корней

Если $m, n \in \mathbb{N}$, $a, b > 0$, то:

$$1. a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, n \neq 1.$$

$$2. \sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & \text{при } a \geq 0, \\ -a, & \text{при } a < 0. \end{cases}$$

$$3. \sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|.$$

$$4. \sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a.$$

$$5. \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}, n \neq 1, m \neq 1.$$

$$6. \sqrt[nm]{a^m} = \sqrt[n]{a}, n \neq 1.$$

$$7. \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}, n \neq 1.$$

$$8. \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, n \neq 1, b \neq 0.$$

$$9. \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a; n \neq 1, a \geq 0.$$

$$10. a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}, n \neq 1.$$

Показательное уравнение

$$a^x = b.$$

Если $b = a^m$, то $a^x = a^m \Leftrightarrow x = m$.

Если $b > 0$, то $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$.

Если $b < 0$, то $a^x = b$ не имеет корней.

Показательные неравенства

а) $a^{f(x)} > a^{g(x)}$.

Если $a > 1$, то $f(x) > g(x)$.

Если $0 < a < 1$, то $f(x) < g(x)$.

б) $a^{f(x)} < a^{g(x)}$.

Если $a > 1$, то $f(x) < g(x)$.

Если $0 < a < 1$, то $f(x) > g(x)$.

Логарифмическое уравнение

$$\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b.$$

Логарифмические неравенства

а) $\log_a f(x) > b \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ f(x) > a^b. \end{cases}$

б) $\log_a f(x) < b \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ f(x) > 0, \\ f(x) < a^b. \end{cases}$

в) $\log_a f(x) > b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1, \\ f(x) > 0, \\ f(x) < a^b. \end{cases}$

г) $\log_a f(x) < b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1, \\ f(x) > a^b. \end{cases}$

Основное логарифмическое тождество

$$a^{\log_a b} = b \quad (a > 0, a \neq 1, b > 0).$$

Свойства логарифмов

1. $\log_a 1 = 0$ ($a > 0, a \neq 1$).

2. $\log_a a = 1$ ($a > 0, a \neq 1$).

3. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ ($a > 0, a \neq 1, x > 0, y > 0$).

4. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ ($a > 0, a \neq 1, x > 0, y > 0$).

$$5. \log_a x^p = p \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1, x > 0).$$

$$6. \log_{a^p} b = \frac{1}{p} \log_a b \quad (a > 0, a \neq 1, b > 0, p \neq 0).$$

$$7. \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \quad (a > 0, a \neq 1, x > 0, b > 0, b \neq 1).$$

$$8. \log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad (a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1).$$

Тригонометрия

$$1 \text{ радиан} = \frac{180^\circ}{\pi}, \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ радиан}.$$

Таблица значений тригонометрических функций

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-

α	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\sin \alpha$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-

Примечание. $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Основные тригонометрические тождества

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha};$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha};$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha};$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1.$$

Свойства тригонометрических функций

1. Четность и нечетность

$$\left. \begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha \\ \operatorname{tg}(-\alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha \\ \operatorname{ctg}(-\alpha) &= -\operatorname{ctg} \alpha \end{aligned} \right\} \text{— нечетные функции,}$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha \text{ — четная функция.}$$

2. Периодичность

$$\left. \begin{aligned} \sin(\alpha + 2\pi n) &= \sin(\alpha + 360^\circ n) = \sin \alpha, \quad n \in Z \\ \cos(\alpha + 2\pi n) &= \cos(\alpha + 360^\circ n) = \cos \alpha, \quad n \in Z \end{aligned} \right\} \text{— период } 2\pi.$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha + \pi n) &= \operatorname{tg}(\alpha + 180^\circ n) = \operatorname{tg} \alpha, \quad n \in Z \\ \operatorname{ctg}(\alpha + \pi n) &= \operatorname{ctg}(\alpha + 180^\circ n) = \operatorname{ctg} \alpha, \quad n \in Z \end{aligned} \right\} \text{— период } \pi.$$

Формулы сложения

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta};$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}.$$

Формулы двойного угла

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha};$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1.$$

Простейшие тригонометрические уравнения

$\sin t = a$ $t = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in Z$	$\cos t = a$ $t = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in Z$
$\operatorname{tg} t = a$ $t = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in Z$	$\operatorname{ctg} t = a$ $t = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in Z$

Частные случаи простейших тригонометрических уравнений

$\sin x = 0$ $x = \pi k, k \in Z$	$\sin x = 1$ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$	$\sin x = -1$ $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$
$\cos x = 0$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$	$\cos x = 1$ $x = 2\pi n, n \in Z$	$\cos x = -1$ $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$

Тригонометрические неравенства

а) $\sin x > a \Leftrightarrow x \in (\arcsin a + 2\pi n; \pi - \arcsin a + 2\pi n), n \in Z;$

б) $\sin x < a \Leftrightarrow x \in (-\pi - \arcsin a + 2\pi n; \arcsin a + 2\pi n), n \in Z;$

в) $\cos x > a \Leftrightarrow x \in (-\arccos a + 2\pi n; \arccos a + 2\pi n), n \in Z;$

г) $\cos x < a \Leftrightarrow x \in (\arccos a + 2\pi n; 2\pi - \arccos a + 2\pi n), n \in Z;$

д) $\operatorname{tg} x > a \Leftrightarrow x \in \left(\operatorname{arctg} a + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right), n \in Z;$

е) $\operatorname{tg} x < a \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \operatorname{arctg} a + \pi n \right), n \in Z;$

ж) $\operatorname{ctg} x > a \Leftrightarrow x \in (\pi n; \operatorname{arcctg} a + \pi n), n \in Z;$

з) $\operatorname{ctg} x < a \Leftrightarrow x \in (\operatorname{arcctg} a + \pi n; \pi + \pi n), n \in Z.$

Формулы комбинаторики

$$P_n = n!; \quad A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}; \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Классическое определение вероятности

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m – число благоприятных исходов опыта;
 n – число всех равновозможных исходов.

Относительная частота события

$$P^*(A) = \frac{m^*}{n},$$

где m – число наступлений события A ;
 n – число всех проведенных испытаний.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

Теорема умножения вероятностей двух зависимых событий

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B).$$

Теорема умножения вероятностей независимых событий

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Теорема сложения вероятностей двух совместных событий

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cdot A_2).$$

Вероятность противоположного события

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Вероятность появления хотя бы одного из событий

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2) \dots P(\bar{A}_n).$$

Элементы статистики

Средняя арифметическая

$$\bar{x}_{ap} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Таблица квадратов чисел от 1 до 100

$1^2 = 1$	$11^2 = 121$	$21^2 = 441$	$31^2 = 961$	$41^2 = 1681$
$2^2 = 4$	$12^2 = 144$	$22^2 = 484$	$32^2 = 1024$	$42^2 = 1764$
$3^2 = 9$	$13^2 = 169$	$23^2 = 529$	$33^2 = 1089$	$43^2 = 1849$
$4^2 = 16$	$14^2 = 196$	$24^2 = 576$	$34^2 = 1156$	$44^2 = 1936$
$5^2 = 25$	$15^2 = 225$	$25^2 = 625$	$35^2 = 1225$	$45^2 = 2025$
$6^2 = 36$	$16^2 = 256$	$26^2 = 676$	$36^2 = 1296$	$46^2 = 2116$
$7^2 = 49$	$17^2 = 289$	$27^2 = 729$	$37^2 = 1369$	$47^2 = 2209$
$8^2 = 64$	$18^2 = 324$	$28^2 = 784$	$38^2 = 1444$	$48^2 = 2304$
$9^2 = 81$	$19^2 = 361$	$29^2 = 841$	$39^2 = 1521$	$49^2 = 2401$
$10^2 = 100$	$20^2 = 400$	$30^2 = 900$	$40^2 = 1600$	$50^2 = 2500$
$51^2 = 2601$	$61^2 = 3721$	$71^2 = 5041$	$81^2 = 6561$	$91^2 = 8281$
$52^2 = 2704$	$62^2 = 3844$	$72^2 = 5184$	$82^2 = 6724$	$92^2 = 8464$
$53^2 = 2809$	$63^2 = 3969$	$73^2 = 5329$	$83^2 = 6889$	$93^2 = 8649$
$54^2 = 2916$	$64^2 = 4096$	$74^2 = 5476$	$84^2 = 7056$	$94^2 = 8836$
$55^2 = 3025$	$65^2 = 4225$	$75^2 = 5625$	$85^2 = 7225$	$95^2 = 9025$
$56^2 = 3136$	$66^2 = 4356$	$76^2 = 5776$	$86^2 = 7396$	$96^2 = 9216$
$57^2 = 3249$	$67^2 = 4489$	$77^2 = 5929$	$87^2 = 7569$	$97^2 = 9409$
$58^2 = 3364$	$68^2 = 4624$	$78^2 = 6084$	$88^2 = 7744$	$98^2 = 9604$
$59^2 = 3481$	$69^2 = 4761$	$79^2 = 6241$	$89^2 = 7921$	$99^2 = 9801$
$60^2 = 3600$	$70^2 = 4900$	$80^2 = 6400$	$90^2 = 8100$	$100^2 = 10000$

Таблица степеней чисел от 1 до 9

$1^1 = 1$	$2^1 = 2$	$3^1 = 3$
$1^2 = 1$	$2^2 = 4$	$3^2 = 9$
$1^3 = 1$	$2^3 = 8$	$3^3 = 27$
$1^4 = 1$	$2^4 = 16$	$3^4 = 81$
$1^5 = 1$	$2^5 = 32$	$3^5 = 243$
$1^6 = 1$	$2^6 = 64$	$3^6 = 729$
$1^7 = 1$	$2^7 = 128$	$3^7 = 2187$
$1^8 = 1$	$2^8 = 256$	$3^8 = 6561$
$1^9 = 1$	$2^9 = 512$	$3^9 = 19683$
$1^{10} = 1$	$2^{10} = 1024$	$3^{10} = 59049$
$4^1 = 4$	$5^1 = 5$	$6^1 = 6$
$4^2 = 16$	$5^2 = 25$	$6^2 = 36$
$4^3 = 64$	$5^3 = 125$	$6^3 = 216$
$4^4 = 256$	$5^4 = 625$	$6^4 = 1296$
$4^5 = 1024$	$5^5 = 3125$	$6^5 = 7776$
$4^6 = 4096$	$5^6 = 15625$	$6^6 = 46656$
$4^7 = 16384$	$5^7 = 78125$	$6^7 = 279936$
$4^8 = 65536$	$5^8 = 390625$	$6^8 = 1679616$
$4^9 = 262144$	$5^9 = 1953125$	$6^9 = 10077696$
$4^{10} = 1048576$	$5^{10} = 9765625$	$6^{10} = 60466176$
$7^1 = 7$	$8^1 = 8$	$9^1 = 9$
$7^2 = 49$	$8^2 = 64$	$9^2 = 81$
$7^3 = 343$	$8^3 = 512$	$9^3 = 729$
$7^4 = 2401$	$8^4 = 4096$	$9^4 = 6561$
$7^5 = 16807$	$8^5 = 32768$	$9^5 = 59049$
$7^6 = 117649$	$8^6 = 2622144$	$9^6 = 531441$
$7^7 = 823543$	$8^7 = 2097152$	$9^7 = 4782969$
$7^8 = 5764801$	$8^8 = 16777216$	$9^8 = 43046721$
$7^9 = 40353607$	$8^9 = 134217728$	$9^9 = 387420489$
$7^{10} = 282475249$	$8^{10} = 1073741824$	$9^{10} = 3486784401$

Учебное издание

Гаврилова Людмила Николаевна
Аглямова Зульфина Шамилевна
Митина Евгения Константиновна
Кожеманова Татьяна Николаевна

МАТЕМАТИКА

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА.
ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Сборник задач

Главный редактор *Г. Я. Дарчинова*
Корректор *Н. В. Караблинова*
Технический редактор *С. А. Каримова*
Дизайнер *Е. А. Лелявина*

Подписано в печать 04.04.2019. Формат 60x84 1/16
Гарнитура Times NR, 10. Усл. печ. л. 3,0
Тираж 300 экз. Заказ № 46



Издательство Казанского инновационного
университета им. В. Г. Тимирязова (ИЭУП)
420111, г. Казань, ул. Московская, 42
Тел. (843) 231-92-90
E-mail: zaharova@ieml.ru

Отпечатано с готового оригинал-макета
в типографии ООО «ТЦО «Таглимат»:
420108, г. Казань, ул. Зайцева, 17