Казанский инновационный университет имени В. Г. Тимирясова

Л.Н. Гаврилова, З.С. Ахмедгараева

МАТЕМАТИКА

Сборник задач

Казань
Познание
2019

УДК 51(076.1)
ББК 22.1я72
Г12

Печатается по решению секции
естественно-научных дисциплин учебно-методического совета
Казанского инновационного университета им. В. Г. Тимирясова

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики
Казанского инновационного университета им. В. Г. Тимирясова
С. И. Филиппов;
кандидат педагогических наук, доцент кафедры высшей математики и
информационных технологий Набережночелнинского филиала Казанского
инновационного университета им. В. Г. Тимирясова ***Ю. Н. Бурханова***

Гаврилова Л.Н.
Г12 Математика: сборник задач / Л.Н. Гаврилова, З. С. Ахмедгараева – Казань: Изд-во «Познание» Казанского инновационного университета им. В. Г. Тимирясова, 2019. – 100 с.

Сборник задач содержит задания для самостоятельного решения по дисциплине «Математика (цикл ЕН)». Данное пособие может быть использовано для проведения практических занятий и организации самостоятельной работы студентов колледжа при изучении дисциплины «Математика (цикл ЕН)».

УДК 51(076.1)
ББК 22.1я72

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данное практическое издание предназначено для студентов изучающих дисциплину «Математика(цикл ЕН)».

Целями освоения дисциплины «Математика(цикл ЕН)» являются:

– создание математического фундамента для изучения общенаучных дисциплин и дисциплин профессионального цикла,

– воспитание математической культуры и понимания роли математики в различных сферах профессиональной деятельности.

Сборник задач содержит задания для самостоятельного решения по дисциплине «Математика(цикл ЕН)». Данное пособие может быть использовано для проведения практических занятий и организации самостоятельной работы студентов при изучении дисциплины «Математика (цикл ЕН)».

В сборнике задач рассматриваются такие разделы математики как линейная алгебра, теория комплексных чисел, дифференциальное исчисление, интегральное исчисление, дифференциальные уравнения, теория вероятностей и математическая статистика, элементы дискретной математики, численные методы, а также аналитическая геометрия.

В результате освоения материала сборника задач обучающиеся будут знать о роли и месте математики в современном мире, общности её понятий и представлений, основы линейной алгебры и аналитической геометрии, основные понятия и методы дифференциального и интегрального исчисления, основные понятия и методы дискретной математики, основные численные методы решения математических задач, методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности.

Данный сборник задач направлен на формирование умений выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений, применять методы дифференциального и интегрального исчисления, решать дифференциальные уравнения, решать задачи на отыскание производной сложной функции, производных второго и высших порядков, применять основные положения теории вероятностей и математической статистики в профессиональной деятельности.

Применение сборника задач позволит приобрести практический опыт решения задач с применением основ математики.

РАЗДЕЛ 1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Матрица и ее виды. Операции над матрицами. Определители, правила их вычисления, свойства. Обратная матрица.

1. Определить размер матрицы.

а) $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & 1 \\ 5 & -1 & 0 & 2 \\ 6 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; б) $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$;

в) $C=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 0 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$; г) $D=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

д) $F=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; е) $G=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Чему равны элементы a_{12}, a_{31}, a_{24} матрицы A?

а) $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 4 & -8 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix} -1 & -6 & 1 & 2 \\ 8 & 3 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 3 & 7 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -5 \end{pmatrix}$.

3. Найти произведение элементов $a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$ матрицы A.

а) $A=\begin{pmatrix} 5 & 7 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 7 \\ 5 & -6 & 8 & 9 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & -3 & 5 \\ 1 & -7 & 1 & -6 \end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & -7 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Найти сумму элементов главной диагонали и произведение элементов вспомогательной диагонали матрицы.

а) $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $B=\begin{pmatrix} 3 & 10 & 7 \\ -8 & 2 & 11 \\ 3 & -9 & -21 \end{pmatrix}$;

в) $C=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & -11 & 6 \end{pmatrix}$; г) $D=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Записать матрицы транспонированные данным.

а) $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; б) $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $C=\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$; г) $D=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

6. Если матрица A^T имеет вид:

а) $A^T=\begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 4 & 2 \\ 1 & -7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A^T=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

в) $A^T=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & -5 \end{pmatrix}$, г) $A^T=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 2 & -9 & 2 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

то каков вид матрицы A?

7. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу C.

а) $C=A+B$; б) $C=A-B$;

в) $C=A\cdot B$; г) $C=B\cdot A$;

д) $C=A^T+B$; е) $C=A-B^T$;

ж) $C=A^T\cdot B$; з) $C=B^T\cdot A$.

8. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу C

.

а) $C=A+B$; б) $C=A-B$;

в) $C=A\cdot B$; г) $C=B\cdot A$;

д) $C=A^T+B$; е) $C=A-B^T$;

ж) $C=A^T\cdot B$; з) $C=B^T\cdot A$.

9. Даны матрицы A и B. Найти матрицу C.

а) $A=\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$, $C=3B+2A$;

б) $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C=A^T-B^T$;

в) $A=\begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 10 & -5 \\ 3 & 16 \end{pmatrix}$, $C=B-2A^T$;

г) $A=\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 6 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C=4A+B^T$;

д) $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C=2A-3B$.

10. Найти произведение матриц A и B.

а) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 4 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 & 1 \\ -6 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$;

г) $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & -8 & -20 \\ 0 & -3 & -2 & 5 & 9 \\ 1 & 4 & 3 & 8 & 9 \end{pmatrix}$;

д) $A=\begin{pmatrix} 7 & 3 & 10 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}$.

11. Вычислить определитель второго порядка.

а) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} 7 & 6 \\ -4 & 10 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 8 & -9 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} x+1 & x-1 \\ x & x+1 \end{vmatrix}$;

е) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$.

12. Вычислить определитель третьего порядка.

а) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & -8 & 1 \\ 6 & 1 & 10 \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$;

е) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}$.

13. Решить уравнения.

а) $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix}=0$;

б) $\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$;

в) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 0$; г) $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

14. Вычислить.

а) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 7 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & -8 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ -6 & 2 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & -5 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 7 & 1 \\ 4 & 3 & 9 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 4 & 14 & 7 \\ 8 & 6 & 18 \end{vmatrix}$.

15. Найти миноры и алгебраические дополнения всех элементов определителя.

а) $\begin{vmatrix} 5 & 7 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

16. Вычислить определитель, разложив по элементам i -й строки.

а) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}, i = 2$; б) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 6 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}, i = 1$;

в) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}, i = 3$; г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \end{vmatrix}, i = 4$.

17. Вычислить определитель, разложив по элементам j -го столбца.

а) $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 4 \end{vmatrix}, j = 4$; б) $\begin{vmatrix} -5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}, j = 1$;

в) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}, j=2$; г) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}, j=3$.

18. Вычислить определитель матриц.

а) $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & -3 & 8 \\ -4 & 6 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$; б) $B=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -8 & 3 \\ -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$;

в) $C=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -7 & 5 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$; г) $D=\begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & 3 & -4 \\ -1 & 5 & 6 & -9 \end{pmatrix}$.

19. Найти обратную матрицу A^{-1} и сделать проверку.

а) $A=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

20. Найти обратную матрицу A^{-1}и сделать проверку.

а) $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix} 6 & 9 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Основные понятия и определения. Правило Крамера. Метод Гаусса.

1. Выяснить, является ли пара чисел (x, y) решением системы?

а) $(2;-2)$ $\begin{cases} 5x+y=8 \\ -3x+2y=-10 \end{cases}$; б) $(3;1)$ $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x-y=2 \end{cases}$;

в) $(1;2)$ $\begin{cases} x+y-3=0 \\ x-y+1=0 \end{cases}$; г) $(-5;-5)$ $\begin{cases} -7,2x+11y=-19 \\ 5,8x-13y=36 \end{cases}$;

д) $(4;5)$ $\begin{cases} x+y=9 \\ 2x-y=-9 \end{cases}$; е) $(1;-1)$ $\begin{cases} 2,7x-8,1y=11,8 \\ 16x-15y=1 \end{cases}$.

2. Решите системы двух уравнений с двумя неизвестными и определите тип системы уравнений.

а) $\begin{cases} 4x+5y=-28 \\ -2x+3y=14 \end{cases}$; б) $\begin{cases} -4x+2y=8 \\ -2x+y=1 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 3x-2y=5 \\ 3x+4y=42 \end{cases}$; г) $\begin{cases} 4x-2y=8 \\ 2x-y=4 \end{cases}$;

д) $\begin{cases} x-3y=7 \\ -7x+y=-69 \end{cases}$; е) $\begin{cases} 5x+2y=3 \\ -5x-2y=-6 \end{cases}$;

ж) $\begin{cases} 3x-2y=6 \\ 3x+10y=-12 \end{cases}$; з) $\begin{cases} 2x-2y=1 \\ 6x-6y=3 \end{cases}$.

3. Решить систему линейных алгебраических уравнений по правилу Крамера.

а) $\begin{cases} 2x-3y-5z=1 \\ 3x+y-2z=-4 \\ x-2y+z=5 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x-y+3z=3 \\ x+2y+z=2 \\ x-3y+4z=-1 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x-3y+z=2 \\ 2x+y+3z=3 \\ 2x-y-2z=8 \end{cases}$; г) $\begin{cases} 3x+y-2z=1 \\ x-2y+3z=5 \\ 2x+3y-z=-4 \end{cases}$;

д) $\begin{cases} 2x+y+3z=-1 \\ 5x+3y+2z=-7 \\ x+4y+3z=8 \end{cases}$; е) $\begin{cases} 3x+2y+z=7 \\ 2x+5y+3z=-4 \\ 3x+4y+2z=2 \end{cases}$;

ж) $\begin{cases} 4x-3y+5z=-3 \\ 3x-2y+8z=-6 \\ x-7y-5z=-7 \end{cases}$;   з) $\begin{cases} 3x+2y-4z=1 \\ 4x+y-2z=3 \\ 5x+2y-3z=2 \end{cases}$;

и) $\begin{cases} 4x+2y-z=-1 \\ 5x+3y-2z=-3 \\ 3x+2y-z=-2 \end{cases}$;   к) $\begin{cases} 2x+3y-z=2 \\ x-y+3z=-4 \\ 3x+5y+z=4 \end{cases}$.

4. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

а) $\begin{cases} 5x+2y+3z=-2 \\ 2x-2y+5z=0 \\ 3x+4y+2z=-10 \end{cases}$;   б) $\begin{cases} 2x+3y+5z=10 \\ 3x+7y+4z=3 \\ x+2y+2z=3 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 4x-3y+2z=-4 \\ 6x-2y+3z=-1 \\ 5x-3y+2z=-3 \end{cases}$;   г) $\begin{cases} 5x-y-2z=1 \\ 3x-4y+z=-4 \\ 2x+3y+3z=11 \end{cases}$;

д) $\begin{cases} 2x-3y+2z=7 \\ 3x+4y+7z=13 \\ 5x+y-5z=-6 \end{cases}$;   е) $\begin{cases} x-2y+3z=14 \\ 2x+3y-4z=-16 \\ 3x-2y-5z=-8 \end{cases}$;

ж) $\begin{cases} 3x+4y-2z=11 \\ 2x-y-z=4 \\ 3x-2y+4z=11 \end{cases}$;   з) $\begin{cases} 2x+11y+5z=2 \\ 2x+3y+2z=-3 \\ x+3y+4z=-3 \end{cases}$;

и) $\begin{cases} x-6y-4z=6 \\ -x-6y-4z=2 \\ 3x+9y+2z=6 \end{cases}$;   к) $\begin{cases} 2x+y+4z=-5 \\ x+3y-6z=2 \\ 3x-2y+2z=9 \end{cases}$.

5. Из некоторого листового материала необходимо выкроить 360 заготовок типа *А*, 300 заготовок типа *Б* и 675 заготовок типа *В*. При этом можно применять три способа раскроя. Количество заготовок, получаемых из каждого листа при каждом способе раскроя, указано в таблице:

Тип заготовки	Способ раскроя		
	1	2	3
А	3	2	1
Б	1	6	2
В	4	1	5

Записать в математической форме условия выполнения задания.

6. Швейная фабрика в течение трех дней производила костюмы, плащи и куртки. Известны объемы выпуска продукции за три дня и денежные затраты на производство за эти три дня. Найти себестоимость единицы продукции каждого вида.

День	Объем выпуска продукции(единиц)			Затраты (тыс.усл.ед)
	Костюмы	Плащи	Куртки	
I	50	10	30	176
II	35	25	20	168
III	40	20	30	184

7. Предприятие выпускает три вида продукции, используя сырье трех типов. Необходимые характеристики производства указаны в таблице:

Вид сырья	Расход сырья по видам продукции, вес. ед./изд.			Запас сырья, вес.ед.
	1	2	3	
1	6	4	5	2 700
2	4	3	1	1 650
3	5	2	3	1 800

Требуется определить объем выпуска продукции каждого вида при заданных запасах сырья.

8. Для изготовления тех видов изделий (A, B и C) фабрика расходует в качестве сырья сталь, чугун и цветные металлы, имеющиеся в ограниченном количестве. Необходимые характеристики производства указаны в таблице:

Вид сырья	Нормы расхода сырья на единицу изделия, усл.ед.			Запасы сырья на 1 день, усл.ед.
	1	2	3	
1	6	4	5	2 700
2	4	3	1	1 650
3	5	2	3	1 800

Требуется определить ежедневный обьем выпуска каждого вида изделий.

9. На предприятие с работниками четырех категорий привезли заработную плату в купюрах следующего достоинства: по 100 рублей – 1850 купюр, по 10 рублей – 250 купюр, 1 рублю – 740 купюр. Заработная плата работника 1-й категории составляет 962 руб., 2-й категории –713 руб., 3-й категории – 452 руб., 4-й категории – 261 руб. Определить, сколько сотрудников каждой категории работает на предприятии, если каждому сотруднику выдали заработную плату минимальным числом купюр.

РАЗДЕЛ 2. ТЕОРИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Основные понятия и определения. Запись комплексного числа в алгебраической и тригонометрической формах. Арифметические действия над комплексными числами в разных формах записи. Показательная форма записи комплексного числа. Формула Эйлера. Возведение комплексного числа в натуральную степень (формула Муавра). Извлечение корня *n*-ой степени из комплексого числа.

1. Указать действительную и мнимую части комплексного числа.

а) $z=4-5i$; б) $z=\sqrt{3}+3i$; в) $z=1-2i$;
г) $z=-9+3i$; д) $z=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$; е) $z=-8-6i$;
ж) $z=3-7i$; з) $z=-2+3i$; и) $z=4+9i$;
к) $z=3-8i$; л) $z=-3-i$; м) $z=5+7i$.

2. Найти степень числа i.

а) i^{17}; б) i^{71}; в) i^{151};
г) i^{143}; д) i^{19}; е) i^{201};
ж) i^{195}; з) i^{14}; и) i^{18};
к) i^{37}; л) i^{41}; м) i^{52}.

3. Найти комплексное число, сопряженное данному числу.

а) $z=-5-9i$; б) $z=8-6i$; в) $z=5+i$;
г) $z=-3+5i$; д) $z=-7i$; е) $z=-5+3i$;
ж) $z=-9-i$; з) $z=4-3i$; и) $z=-2-4i$;
к) $z=5$; л) $z=8+4i$; м) $z=i$.

4. Изобразить комплексное число в комплексной плоскости.

а) $z=-2+2i$; б) $z=2+i$; в) $z=2i$;
г) $z=-3-3i$; д) $z=-9$; е) $z=5-3i$;
ж) $z=-3i$; з) $z=-4-3i$; и) $z=7+7i$;
к) $z=4$; л) $z=4-4i$; м) $z=5i$.

5. Найти модуль комплексного числа.

а) $z=-2i$; б) $z=8$; в) $z=-3+i$;
г) $z=4i$; д) $z=2+2i$; е) $z=-i$;
ж) $z=-6-3i$; з) $z=-1-i$; и) $z=5+5i$;
к) $z=7$; л) $z=-6-6i$; м) $z=-1+2i$.

6. Найти аргумент комплексного числа.

а) $z=-\sqrt{3}-3i$; б) $z=\sqrt{3}-3i$; в) $z=5i$;

г) $z=-\sqrt{3}+3i$; д) $z=\sqrt{3}+3i$; е) $z=-6\sqrt{3}i$;

ж) $z=-6+3\sqrt{2}i$; з) $z=6+3\sqrt{2}i$; и) $z=-3i$;

к) $z=-6-3\sqrt{2}i$; л) $z=6-3\sqrt{2}i$; м) $z=-\sqrt{2}+\sqrt{6}i$.

7. Представить комплексное число в тригонометрической форме.

а) $z=2-2i$; б) $z=2+2i$; в) $z=-2+2i$;

г) $z=-2-2i$; д) $z=2+2\sqrt{3}i$; е) $z=2-2\sqrt{3}i$;

ж) $z=-2+2\sqrt{3}i$; з) $z=-2-2\sqrt{3}i$; и) $z=2\sqrt{3}+2i$;

к) $z=2\sqrt{3}-2i$; л) $z=-2\sqrt{3}+2i$; м) $z=-2\sqrt{3}-2i$.

8. Представить комплексное число в показательной форме.

а) $z=2\sqrt{3}+2i$; б) $z=2\sqrt{3}-2i$; в) $z=-2\sqrt{3}+2i$;

г) $z=-2\sqrt{3}-2i$; д) $z=1+\sqrt{3}i$; е) $z=1-\sqrt{3}i$;

ж) $z=-1+\sqrt{3}i$; з) $z=-1-\sqrt{3}i$; и) $z=-\sqrt{6}-\sqrt{2}i$;

к) $z=-\sqrt{6}+\sqrt{2}i$; л) $z=\sqrt{6}-\sqrt{2}i$; м) $z=\sqrt{6}+\sqrt{2}i$.

9. Найти сумму, разность, произведение и частное двух комплексных чисел в алгебраической форме.

а) $z_1=2+3i$, $z_2=1+i$; б) $z_1=3+4i$, $z_2=1-i$;

в) $z_1=1-2i$, $z_2=-1+i$; г) $z_1=2+5i$, $z_2=-1-i$;

д) $z_1=3-8i$, $z_2=2+i$; е) $z_1=3-7i$, $z_2=2-i$;

ж) $z_1=2+6i$, $z_2=-2+i$; з) $z_1=4+2i$, $z_2=-2-i$;

и) $z_1=5+3i$, $z_2=3+i$; к) $z_1=6-2i$, $z_2=3-i$;

л) $z_1=7+9i$, $z_2=-3+i$; м) $z_1=3-7i$, $z_2=-3-i$.

10. Решить уравнение на множестве комплексных чисел.

а) $x^2+1=0$; б) $x^2+3x+4=0$;

в) $x^2+4=0$; г) $x^2-3x+3=0$;

д) $x^2+9=0$; е) $x^2-5x+7=0$;

ж) $x^2+16=0$; з) $x^2+x+2=0$;

и) $x^2+25=0$; к) $x^2+3x+3=0$;

л) $x^2+36=0$; м) $x^2+x+1=0$.

11. Представить комплексное число в тригонометрической форме.

а) $z=2+2i$; б) $z=2-2i$; в) $z=-2+2i$;

г) $z=-2-2i$; д) $z=2+2\sqrt{3}i$; е) $z=2-2\sqrt{3}i$;

ж) $z=-2+2\sqrt{3}i$; з) $z=-2-2\sqrt{3}i$; и) $z=2\sqrt{3}+2i$;

к) $z=2\sqrt{3}-2i$; л) $z=-2\sqrt{3}+2i$; м) $z=-2\sqrt{3}-2i$.

12. Представить комплексное число в показательной форме.

а) $z=2\sqrt{3}+2i$; б) $z=2\sqrt{3}-2i$; в) $z=-2\sqrt{3}+2i$;

г) $z=-2\sqrt{3}-2i$; д) $z=1+\sqrt{3}i$; е) $z=1-\sqrt{3}i$;

ж) $z=-1+\sqrt{3}i$; з) $z=-1-\sqrt{3}i$; и) $z=-\sqrt{6}-\sqrt{2}i$;

к) $z=\sqrt{6}+\sqrt{2}i$; л) $z=\sqrt{6}-\sqrt{2}i$; м) $z=-\sqrt{6}+\sqrt{2}i$.

13. Найти произведение и частное двух комплексных чисел в тригонометрической форме.

а) $z_1=2+2\sqrt{3}i$, $z_2=-5\sqrt{3}-5i$; б) $z_1=2-2\sqrt{3}i$, $z_2=-5\sqrt{3}+5i$;

в) $z_1=-2+2\sqrt{3}i$, $z_2=5\sqrt{3}-5i$; г) $z_1=-2-2\sqrt{3}i$, $z_2=5\sqrt{3}+5i$;

д) $z_1=2+2i$, $z_2=-5-5\sqrt{3}i$; е) $z_1=2-2i$, $z_2=-5+5\sqrt{3}i$;

ж) $z_1=-2+2i$, $z_2=5-5\sqrt{3}i$; з) $z_1=-2-2i$, $z_2=5+5\sqrt{3}i$;

и) $z_1=3+\sqrt{3}i$, $z_2=-7\sqrt{3}-7i$; к) $z_1=3-\sqrt{3}i$, $z_2=-7\sqrt{3}+7i$;

л) $z_1=-3+\sqrt{3}i$, $z_2=7\sqrt{3}-7i$; м) $z_1=-3-\sqrt{3}i$, $z_2=7\sqrt{3}+7i$.

14. Представить комплексное число в показательной форме.

а) $z=(6-6i)^3$; б) $z=(-6+6i)^3$; в) $z=(-6-6i)^3$;

г) $z=(6+6i)^3$; д) $z=(-1-\sqrt{3}i)^6$; е) $z=(1+\sqrt{3}i)^6$;

ж) $z=(-1+\sqrt{3}i)^6$; з) $z=(1-\sqrt{3}i)^6$; и) $z=(5\sqrt{3}-5i)^3$;

к) $z=(5\sqrt{3}+5i)^3$; л) $z=(-5\sqrt{3}+5i)^3$; м) $z=(-5\sqrt{3}-5i)^3$.

15. Найти все значения корня из комплексного числа.

а) $z=\sqrt[3]{5+5i}$; б) $z=\sqrt[3]{-6-6i}$; в) $z=\sqrt[3]{3-3i}$;

г) $z=\sqrt[3]{-2+2i}$; д) $z=\sqrt[3]{-7+7i}$; е) $z=\sqrt[3]{-1-1i}$;

ж) $z=\sqrt[4]{9-9i}$; з) $z=\sqrt[4]{-3-3i}$; и) $z=\sqrt[4]{-4+4i}$;

к) $z=\sqrt[4]{4+4i}$; л) $z=\sqrt{10+10i}$; м) $z=\sqrt{-9+9i}$.

РАЗДЕЛ 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Понятие числовой последовательности, способы ее задания. Предел функции в точке. Основные теоремы о пределах. Замечательные пределы. Непрерывность функций. Точки разрывафункции и их классификация.

1. Вычислите первые пять членов числовой последовательности общий член которой выражается формулой $\{a_n\}$.

а) $a_n = n^4 - 47$; б) $a_n = (2n-11)^n$;

в) $a_n = \dfrac{n^2+5}{n}$; г) $a_n = \dfrac{n^3-7}{n+2}$;

д) $a_n = \dfrac{n!}{6}$; е) $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$;

ж) $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(9-n)!}$; з) $a_n = \dfrac{n-37}{2^n}$;

и) $a_n = \dfrac{n!}{\sqrt{n}}$; к) $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{(-1)^{n+1}}$;

л) $a_n = \sqrt[3]{n^2+2}$; м) $a_n = \sqrt{n^3+1}$.

2. Вычислить пределы.

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(x^2+4x-6\right)$ при $x_0=-1,\ x_0=0,\ x_0=1$;

б) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(x^2+5x+4\right)$ при $x_0=-1,\ x_0=0,\ x_0=1$;

в) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(3x^2+10x-8\right)$ при $x_0=-1,\ x_0=0,\ x_0=1$;

г) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(x^3-2x^2+3\right)$ при $x_0=-1,\ x_0=0,\ x_0=1$.

3. Вычислить пределы.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+5}{x^2-3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+9}{x^3-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5+14}{4x^5-10}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4+2}{10x^4-1}$.

4. Вычислить пределы.

а) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{(x-7)\sqrt{8-x}}{x^2-49}$; б) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{(x-8)\sqrt{2+x}}{x^2-64}$;

в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(5-x)\sqrt{x-1}}{x^2-25}$; г) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{(x-2)\sqrt{6-x}}{x^2-36}$;

д) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)\sqrt{x+1}}{x^2-9}$; е) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{(x-9)\sqrt{x-6}}{x^2-81}$;

ж) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{(x+4)\sqrt{1-x}}{16-x^2}$; з) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x-3)\sqrt{3+x}}{x^2-9}$;

и) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{(x+8)\sqrt{2-x}}{x^2-64}$; к) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)\sqrt{2-x}}{x^2-4}$.

5. Вычислить пределы.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+1}{x^2-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+27}{x^4-81}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+4x^2-5}{x^2-2x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^4-4}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-81}{x^5-6x+9}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^6-1}{x^2-2x+1}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+2x+1}{3x^3-2}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+4x+1}{5x^3-4}$.

6. Вычислить пределы.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{7x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\sin 4x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 5x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 4x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}$; з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 4x}$;

и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{\sin 5x}$; к) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}$;

л) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg 2x}{2x^2}$; м) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg 2x}{3x}$.

7. Вычислить пределы.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{x}\right)^x$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{5x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{3x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{2x}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{6x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+3}{3x+2}\right)^{x}$;

з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{x}$;

и) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}$;

к) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-8}{3x+7}\right)^{x+2}$.

8. Исследовать на непрерывность функцию.

а) $y=\dfrac{2}{x-1}$;

б) $y=\dfrac{3}{x+2}$;

в) $y=\dfrac{x-2}{x+1}$;

г) $y=\dfrac{x+3}{x+4}$;

д) $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$;

е) $y=\dfrac{x^2-9}{x+3}$;

ж) $y=\dfrac{x^2-16}{3x-12}$;

з) $y=\dfrac{2x^2-50}{x+5}$;

9. Исследовать на непрерывность функцию.

а) $f(x)=\begin{cases}1-x, x\le 0\\ 2x+1, x>0\end{cases}$;

б) $f(x)=\begin{cases}3-x, x<1\\ x^2+1, x\ge 1\end{cases}$;

в) $f(x)=\begin{cases}1-2x, x\le 0\\ x+1, x>0\end{cases}$;

г) $f(x)=\begin{cases}4-x^2, x<3\\ 2x-11, x>3\end{cases}$;

д) $f(x)=\begin{cases}x, x<-1\\ x^2+1, -1\le x<1\\ 2x, x\ge 1\end{cases}$;

е) $f(x)=\begin{cases}2-x, x<-1\\ x+4, -1\le x<2\\ x^2, x\ge 2\end{cases}$;

ж) $f(x)=\begin{cases}x+2, x\le -1\\ x^2+1, -1<x\le 1\\ -x+3, x>1\end{cases}$;

з) $f(x)=\begin{cases}x^2+1, x\le 0\\ 1+2x, 0<x<2\\ x-2, x\ge 2\end{cases}$.

ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Производная функции, ее геометрический и механический смысл. Таблица производных основных элементарных функций.Правила дифференцирования. Производные обратной и сложной функции. Производные высших порядков. Дифференциал функции, его геометрический смысл.

1. Найти приращение функции $f(x)$ в точке x_0.

а) $f(x)=x^2+3x+1,\ x_0=1,\ \Delta x=0{,}1;$

б) $f(x)=\dfrac{1}{x},\ x_0=2,\ \Delta x=0{,}2;$

в) $f(x)=\sqrt{x},\ x_0=4,\ \Delta x=0{,}41;$

г) $f(x)=\lg x,\ x_0=10,\ \Delta x=0{,}3.$

2. Найти производные указанных функций, исходя из определения производной.

а) $y=3x+2;$ б) $y=2x^2-3x;$

в) $y=x^2-2x+3;$ г) $y=2x^3+5x^2-7x-4;$

д) $y=\dfrac{2}{x};$ е) $y=\dfrac{1}{x^3};$

ж) $y=\dfrac{x}{x+1};$ з) $y=\dfrac{x}{x+2};$

и) $y=\sqrt[3]{x};$ к) $y=\sqrt{x+1}.$

3. Найти производные функций.

а) $y=4x^5-\sqrt[3]{x}+2x-9+\sin x;$ б) $y=3x^5-\sqrt[4]{x}-x-1+\cos x;$

в) $y=x^5-2\sqrt[4]{x}-x+2+e^x;$ г) $y=2x^6-2\sqrt{x}+3x-1-\log_4 x;$

д) $y=x^{10}-\sqrt[5]{x^3}+3x-9+\mathrm{tg}x;$ е) $y=4x^8-\sqrt[5]{x^2}+x-19+\mathrm{ctg}x;$

ж) $y=7x^6-\sqrt[7]{x^2}+4x-11+\ln x;$ з) $y=3x^2-\sqrt[5]{x^2}-6x+12+\arcsin x;$

и) $y=5x^2-\sqrt[3]{x^2}+7x-\arccos x;$ к) $y=4x^5-\sqrt[7]{x^4}-12x+6-7^x.$

4. Найти производные функций.

а) $y=\left(x^3+4\right)\cdot\left(x^2-3\right);$ б) $y=\left(x^3-2\right)\cdot\left(x^2+1\right);$

в) $y=\sqrt{x}\cdot\left(2x-4\right);$ г) $y=\left(x^3+1\right)\cdot\sqrt{x};$

д) $y=x^2\cdot\cos x;$ е) $y=\left(2x+3\right)\cdot\sin x;$

ж) $y=\left(x^2+2x+3\right)\cdot e^x;$ з) $y=\cos x\cdot e^x;$

и) $y = x^2 \cdot \ln x$;

к) $y = x^2 \cdot 2^x$;

л) $y = x \cdot \arcsin x$;

м) $y = \left(x^2 + 1\right) \cdot \operatorname{arc\,tg} x$.

5. Найти производные функций.

а) $y = \dfrac{6x+5}{4-3x}$;

б) $y = \dfrac{3x-7}{5-2x}$;

в) $y = \dfrac{3\sqrt{x}}{2x-9}$;

г) $y = \dfrac{-2\sqrt{x}}{8-3x}$;

д) $y = \dfrac{3^x}{3x}$;

е) $y = \dfrac{e^x}{x}$;

ж) $y = \dfrac{\ln x}{x}$;

з) $y = \dfrac{5x}{\ln x}$;

и) $y = \dfrac{tgx}{\sqrt{x}}$;

к) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\cos x}$;

л) $y = \dfrac{\sin x}{\cos x - 1}$;

м) $y = \dfrac{\cos x}{1 + \sin x}$.

6. Найти значение производной функции в указанной точке x_0.

а) $y = x^3 + 2x + 7$, $x_0 = -1$;

б) $y = x + x^4 + x^6$, $x_0 = -1$;

в) $y = \dfrac{x}{3} - \dfrac{3}{x}$, $x_0 = 3$;

г) $y = \dfrac{x+1}{x^2-5} + 6x$, $x_0 = 3$;

д) $y = 6\sqrt{x} + 9x + 4$, $x_0 = 9$;

е) $y = 12\sqrt{x} - 7x + 5$, $x_0 = 4$;

ж) $y = 4e^x + 8x - 1$, $x_0 = 0$;

з) $y = 2e^x + 4x - 5$, $x_0 = 0$.

7. Найти значение производной функции в указанной точке x_0.

а) $y = \ln x - 6x + 4$, $x_0 = \dfrac{1}{8}$;

б) $y = \ln x - 4x + 7$, $x_0 = \dfrac{1}{2}$;

в) $y = \cos x + 4x$, $x_0 = \dfrac{3\pi}{2}$;

г) $y = 8x + 5\sin x$, $x_0 = \pi$;

д) $y = \cos x - \dfrac{\pi}{2} \cdot x^2 + 1$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$;

е) $y = 5 - \pi \cdot x^3 + \sin x$, $x_0 = \pi$;

ж) $y = 3x - 2\operatorname{tg} x$, $x_0 = 0$;

з) $y = \operatorname{ctg} x - 3x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

8. Найти производные сложных функций.

а) $y = (4x-9)^7$;

б) $y = (5x+1)^9$;

в) $y=\left(\frac{x}{3}+2\right)^{12}$; г) $y=\left(\frac{x}{4}-3\right)^{14}$;

д) $y=\sqrt{5x-1}$; е) $y=\sqrt{x^2+1}$;

ж) $y=\sqrt[3]{(2x+3)^2}$; з) $y=\sqrt[5]{(15-7x)^2}$.

9. Найти производные сложных функций.

а) $y=\sin(3x-9)$; б) $y=\cos(5x+9)$;

в) $y=2\cdot\ln(x^2-4x)$; г) $y=4\cdot\ln(4-4x^2)$;

д) $y=e^{4x-2}$; е) $y=e^{2x-x^2}$;

ж) $y=\sin(e^{3x})$; з) $y=5^{\arccos(3x)}$;

и) $y=e^{\sqrt{x^2+x+2}}$; к) $y=\mathrm{tg}(\cos 2x)$.

10. Найти производные сложных функций.

а) $y=e^x\cdot(x-5)^2$; б) $y=e^x\cdot(2x-1)^2$;

в) $y=\cos x\cdot(3x+1)^2$; г) $y=\cos x\cdot(2x-7)^2$;

д) $y=\sin x\cdot(3x-2)^2$; е) $y=\sin x\cdot(x+5)^2$;

ж) $y=\ln x\cdot(2x-5)^2$; з) $y=\ln x\cdot(x+7)^2$.

и) $y=\frac{x^3}{\ln 3x}$; к) $y=\frac{\ln 2x}{x^2}$;

л) $y=\frac{\sin 2x}{x^2}$; м) $y=\frac{x^3}{\cos 3x}$.

11. Найти производные второго порядка от указанных функций.

а) $y=3x^4-5x^3+2x^2-x$; б) $y=4x^8-2x^5+6x^3+3x$;

в) $y=\frac{x^2}{x^2-1}$; г) $y=\frac{2x^3}{3-x^3}$;

д) $y=(2x+5)^3$; е) $y=(3x-1)^4$;

ж) $y=x\cdot\sin 2x$; з) $y=e^x\cdot\cos 3x$.

12. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой x_0.

а) $f(x)=4x^2-2x^3-2x$, $x_0=2$; б) $f(x)=-3x^2-6x-1$, $x_0=3$;

в) $f(x)=5x^3-4x^2-1$, $x_0=-1$; г) $f(x)=3x^3+12x+7$, $x_0=1$;

д) $f(x)=2x^4+x^3-4x$, $x_0=2$; е) $f(x)=4x^4-6x+1$, $x_0=-1$;

ж) $f(x)=-\frac{2}{3}x^3+3x^2-2,\ x_0=-3$; з) $f(x)=9+8x^2-\frac{1}{3}x^3,\ x_0=1$.

13.Материальная точка движется прямолинейно по закону $X=X(t)$ (где x – расстояние от точки отсчета в метрах, t – время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени t_0.

а) $X(t)=t^2-3t-29,\ t_0=3$; б) $X(t)=t^2-7t-20,\ t_0=5$;

в) $X(t)=-t^2+7t-4,\ t_0=1$; г) $X(t)=t^2+7t+3,\ t_0=9$;

д) $X(t)=t^2-3t-2,\ t_0=8$; е) $X(t)=t^2+5t-16,\ t_0=2$;

ж) $X(t)=\frac{1}{6}t^2+4t-20,\ t_0=6$; з) $X(t)=\frac{1}{2}t^2-t+14,\ t_0=3$;

и) $X(t)=\frac{1}{3}t^2+7t+13,\ t_0=6$; к) $X(t)=\frac{1}{4}t^2+3t+29,\ t_0=2$;

л) $X(t)=-\frac{1}{2}t^2+9t-29,\ t_0=7$; м) $X(t)=\frac{1}{5}t^2+9t-25,\ t_0=5$.

14. Вычислить производительность труда во время первых 4часов работы, если объем продукции y в течение рабочего дня представлен функцией и сделать выводы.

а) $y=5t^3+30t^3+10t$, t – время, ч.;

б) $y=4t^3+20t^2+20t$, t – время, ч.;

в) $y=5t^2+10t^3+100t$, t – время, ч.;

г) $y=-t^3+20t^2+40t$, t – время, ч.;

д) $y=-3t^3+20t^2+100t$, t – время, ч.;

е) $y=-4t^3+20t^2+40t$, t – время, ч.

15. Предприятие производит x единиц некоторой однородной продукции в месяц. Установлено, что зависимость финансовых накоплений предприятия от объема выпуска выражается формулой $y=f(x)$.Исследовать потенциал предприятия.

а) $y=-0,05x^3+1200x-7000$; б) $y=-0,02x^3+600x-1000$.

16. Цементный завод производит X тонн цемента в день. По договору он должен ежедневно поставлять строительной фирме не менее 20 тонн цемента. Производственные мощности завода таковы, что выпуск цемента не может превышать 90 тонн в день.Определить, при каком объеме производства

удельные затраты будут наибольшими (наименьшими), если функция затрат имеет вид: $K = -x^3 + 98x^2 + 200x$.

17. Найти дифференциал функции.

а) $y = x^4$; б) $y = x$;

в) $y = 3x^2 - 4x$; г) $y = 2x^2 + 4x$;

д) $y = \ln x + \dfrac{5}{x}$; е) $y = e^x - \dfrac{3}{\sqrt{x}}$;

ж) $y = x^3 \cdot \ln x$; з) $y = 6^x \cdot ctgx$;

и) $y = 4x^3 \cdot \cos x$; к) $y = e^x \cdot \left(4x - x^3\right)$;

л) $y = \dfrac{2x^2 - 5}{2x^2 + 3}$; м) $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 5}$.

18. Найти дифференциал функции.

а) $y = (2x - 1)^4$; б) $y = \left(x^3 + 2\right)^{15}$;

в) $y = \sqrt{5x - 6}$; г) $y = \sqrt{x^2 + 4}$;

д) $y = \ln\left(1 - x^2\right)$; е) $y = e^{2x+8}$;

ж) $y = 4 \cdot tg5x$; з) $y = 5 \cdot \sin 6x$;

и) $y = \cos(5x - 3)$; к) $y = tg\left(3x + 4\right)$.

19. Найти дифференциал функции и вычислить его значениепри заданных x и Δx .

а) $y = x^2 - x + 1,\ x = 2,\ \Delta x = 0{,}1$; б) $y = 2x^3 + 5x,\ x = 1,\ \Delta x = 0{,}01$;

в) $y = \sqrt{1 + x^2},\ x = 0,\ \Delta x = -0{,}02$; г) $y = \ln 3x,\ x = 0{,}5,\ \Delta x = -0{,}2$.

20. Для приближенного вычисления значения функции $y(x)$ в точке $x_0 + \Delta x$ можно использовать формулу: $y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + y'(x_0) \cdot \Delta x$, где $y'(x_0) \cdot \Delta x$– приращение функции в точке x_0. Функция $y(x)$ определяется из условия задачи. Значения x_0 и Δx выбираются так, чтобы можно было вычислить $y(x_0)$ и при этом Δx, взятое по модулю, было бы как можно меньше. Найти наилучшее приближенное значение выражения.

а) $\sqrt{80{,}7}$; б) $\sqrt{16{,}08}$; в) $\sqrt[3]{0{,}94}$;

г) $\sqrt[3]{8{,}27}$; д) $\sqrt[4]{0{,}96}$; е) $\sqrt[4]{1{,}01}$;

ж) $\sqrt[5]{0{,}92}$; з) $\sqrt[5]{32{,}16}$; и) $\sqrt[5]{0{,}92}$.

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА

Достаточные условия постоянства и монотонности функции. Необходимые и достаточные условия существования экстремумов. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.Асимптоты функции. Выпуклость графика функции. Точки перегиба. Общая схема исследования функции и построение ее графика.

1. Найти интервалы возрастания и убывания функций.

а) $y = x^2 - 6x + 8$; б) $y = x^4 - 2x^3 + 5$;

в) $y = x^3 - 9x^2 - 21x + 1$; г) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$;

д) $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$; е) $y = 12x + 3x^2 - 2x^3$;

ж) $y = \dfrac{-x^2 + 6x - 18}{x^2}$; з) $y = \dfrac{x^2 + x - 4}{x^2}$.

2. Исследовать функции на экстремум.

а) $y = x^2 - 4x + 5$; б) $y = 3 + 8x - 2x^2$;

в) $y = x^3 - 9x^2 + 15x - 2$; г) $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 1$;

д) $y = \dfrac{x^4 - 1}{x^2}$; е) $y = \dfrac{2x^2 - 1}{x^4}$;

ж) $y = \sqrt{2x - 5}$; з) $y = \sqrt{2x - 6}$;

и) $y = x - \ln(1 + x)$; к) $y = x - \ln(1 + x^2)$.

3. Исследовать функции на экстремумс помощью второй производной.

а) $y = 2x^2 - 3$; б) $y = x^2 - 2x$;

в) $y = 2x^2 - 5x + 2$; г) $y = -x^2 + 4x + 1$;

д) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 4$; е) $y = x^3 - \dfrac{9}{2}x^2 + 6x - 2$;

ж) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$; з) $y = \dfrac{3x}{x^2 + 1}$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функций на указанных отрезках.

а) $y = x^3 - 3x^2 - 3$, $[1;4]$; б) $y = 4x^4 - 2x^2 + 2$, $[0;2]$;

в) $y = x^2 - 4x + 3$, $[0;3]$; г) $y = x^2 - 6x + 13$, $[0;6]$;

д) $y = x^3 - 9x^2 + 15x + 1$, $[-2;6]$; е) $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 5$, $[-2;2]$;

ж) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$, $[-4;4]$; з) $y = -x^3 + 9x^2 - 24x + 10$, $[0;3]$.

5. Найти наибольшее и наименьшее значение функций на указанных отрезках.

а) $y=\frac{x}{3}+\frac{3}{x}$, $[1;5]$;

б) $y=\frac{x^3}{x^2-3}$, $[2;4]$;

в) $y=\frac{2x}{x-x^2-1}$, $[0;2]$;

г) $y=\frac{x^3+2x^2}{x-2}$, $[-1;1]$;

д) $y=x-2\sqrt{x}$, $[0;4]$;

е) $y=\sqrt[3]{x^5}-\sqrt[3]{x^2}+1$, $[-1;0]$;

ж) $y=\sin 2x-x$, $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;

з) $y=2\sin x-\cos 2x$, $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$.

6. Найти интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба кривых.

а) $y=x^4-10x^3+36x^2-10$;

б) $y=x^4-6x^3+12x^2-10$;

в) $y=3x^5-5x^4+2x+3$;

г) $y=x+36x^2-2x^3-x^4$;

д) $y=\frac{x^2+2x+4}{x+2}$;

е) $y=\frac{x^4-x+1}{x^3-1}$.

7. Найти интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба кривых.

а) $y=4-\sqrt[3]{x-1}$;

б) $y=2+\sqrt[5]{(x-4)^3}$;

в) $y=x+8\sqrt[4]{x^3}$;

г) $y=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}$;

д) $y=x\cdot e^{-x^2}$;

е) $y=(x+1)\cdot e^{-x}$;

ж) $y=\ln\left(x^2-1\right)$;

з) $y=x^2\cdot\ln x$.

8. Построить графики функций.

а) $y=3x^2-x^3$;

б) $y=x^3+3x^2$;

в) $y=3x^2-4x+5$;

г) $y=7-x-2x^2$;

д) $y=2x^3+x^2-x-1$;

е) $y=x^3+x^2-x-1$;

ж) $y=-\frac{x^3}{3}+x^2+3x-\frac{11}{3}$;

з) $y=\frac{x^3}{3}+x^2-3x+\frac{5}{3}$.

9. Построить графики функций.

а) $y=x+\frac{1}{x}$;

б) $y=4x^2+\frac{1}{x}$;

в) $y=\frac{x+2}{x-3}$;

г) $y=\frac{x-3}{x+1}$;

д) $y=\frac{x}{1+x^2}$;

е) $y=\frac{2x}{1-x^2}$;

ж) $y=-\frac{x^3}{3}+x^2+3x-\frac{11}{3}$;

з) $y=\frac{x^3}{3}+x^2-3x+\frac{5}{3}$;

и) $y=\sqrt[3]{x^2-2x}$;

к) $y=\sqrt[3]{1-x^3}$

РАЗДЕЛ 4. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Понятие неопределенного интеграла. Таблица основных неопределенных интегралов. Основные свойства неопределенного интеграла. Основные методы интегрирования. Интегрирование простейших рациональных дробей. Интегрирование иррациональных и тригонометрических выражений.

1. Найти интегралы непосредственным интегрированием, используя свойства и таблицу интегралов.

а) $\int\left(6x^2+8x-\frac{3}{x}+5\right)dx$; б) $\int\left(13^x+x-\frac{5}{\cos^2 x}+1\right)dx$;

в) $\int\left(4^x+12x-\frac{3}{x}+\sin x\right)dx$; г) $\int\left(5x^4-\cos x+10x+e^x\right)dx$;

д) $\int\left(7x^6-11-\frac{3}{\sin^2 x}+x\right)dx$; е) $\int\left(2x^3-3x^2+4x-\frac{5}{x}+6\right)dx$;

ж) $\int\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)dx$; з) $\int\left(\frac{2}{x}-\frac{3}{x^4}+\frac{4}{x^5}\right)dx$.

2. Найти интегралы непосредственным интегрированием, используя свойства и таблицу интегралов.

а) $\int\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$; б) $\int\left(\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{x\sqrt{x}}{4}\right)dx$;

в) $\int\left(x^5+3x+\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt[4]{x}}\right)dx$; г) $\int\left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}+x\sqrt[4]{x}\right)dx$;

д) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}+\frac{x^2}{\sqrt{x}}\right)dx$; е) $\int\left(\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+2\right)dx$.

3. Найти интегралы непосредственным интегрированием, используя свойства и таблицу интегралов.

а) $\int\left(\frac{10x^8+3}{x^4}\right)dx$; б) $\int\left(\frac{x-2}{x^3}\right)dx$;

в) $\int\left(\frac{2x+3}{x^4}\right)dx$; г) $\int\frac{\left(x^2+1\right)^2}{x^3}dx$;

д) $\int\frac{\left(x^2-2\right)^2}{x^2}dx$; е) $\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2dx$.

4. Найти интегралы заменой переменной интегрирования.

а) $\int \sqrt{2-5x}dx$; б) $\int \sqrt{4x+6}dx$;

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-6x}}$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x+2}}$;

д) $\int (2x+5)^{10} dx$; е) $\int (3-x)^4 dx$.

5. Найти интегралы заменой переменной интегрирования.

а) $\int e^{-4x+5}dx$; б) $\int 4^{3-2x}dx$;

в) $\int \cos 5x dx$; г) $\int \sin 2x dx$;

д) $\int \cos(3x+5)dx$; е) $\int \sin(7x+8)dx$.

6. Применяя метод интегрирования по частям, найти следующие интегралы.

а) $\int (x+2)e^x dx$; б) $\int (4-x)e^x dx$;

в) $\int (x-7)\sin x dx$; г) $\int (3-2x)\cos x dx$;

д) $\int \ln x dx$; е) $\int \ln(5-4x)dx$;

ж) $\int (x^2+3)\ln x\, dx$; з) $\int \arcsin x dx$;

и) $\int x \sin 3x\, dx$; к) $\int (x^2+2)\cos x\, dx$;

л) $\int \mathrm{arctg} x dx$; м) $\int e^x \sin 3x\, dx$.

7. Найти интегралы от рациональных дробей.

а) $\int \frac{dx}{x-12}$; б) $\int \frac{dx}{4x+8}$;

в) $\int \frac{6}{x+4}dx$; г) $\int \frac{3}{2x-6}dx$;

д) $\int \frac{4}{5x+3}dx$; е) $\int \frac{2}{x-3}dx$;

ж) $\int \frac{dx}{(3x-2)^2}$; з) $\int \frac{dx}{(3x+4)^2}$;

и) $\int \frac{5}{(x-2)^3}dx$; к) $\int \frac{4}{(2x+3)^3}dx$;

л) $\int \frac{10}{(2x-5)^4}dx$; м) $\int \frac{12}{(3x+8)^4}dx$.

8. Найти следующие интегралы от иррациональных выражений.

а) $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$; б) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

в) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}dx$; г) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+16}}dx$;

д) $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx$; е) $\int \frac{x^4}{\sqrt{x^2-1}}dx$.

9. Найти следующие интегралы от иррациональных выражений.

а) $\int \sqrt{4-x^2}dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x-7}}$;

в) $\int \sqrt{16-x^2}dx$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-10x+16}}$;

д) $\int \sqrt{49-x^2}dx$; е) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-8x+14}}$.

10. Найти следующие интегралы от тригонометрических выражений.

а) $\int ctg2x\,dx$; б) $\int tgx\,dx$;

в) $\int \frac{dx}{3-\sin x}$; г) $\int \frac{dx}{5-\cos x}$;

д) $\int \sin^2 x\cdot\cos^2 xdx$; е) $\int \sin x\cdot\cos^3 xdx$;

ж) $\int \sin^6 x\cdot\cos^8 xdx$; з) $\int \sin^5 x\cdot\cos^7 xdx$;

и) $\int \sin 5x\cdot\cos xdx$; к) $\int \sin 2x\cdot\sin 5xdx$;

л) $\int \sin 3x\cdot\cos 5xdx$; м) $\int \cos 3x\cdot\cos 4xdx$.

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Задача о вычислении площади криволинейной трапеции. Понятие определенного интеграла и его свойства. Формула Ньютона-Лейбница. Основные методы интегрирования для определенного интеграла.Геометрические и физические приложения определенного интеграла.

1. Найти интегралы непосредственным интегрированием, используя свойства и таблицу интегралов.

а) $\int_{-1}^{2} x^2(3-x)dx$; б) $\int_{-1}^{1} x(5+x)dx$;

в) $\int_{0}^{2} x\left(4x^2+3x-2\right)dx$; г) $\int_{0}^{2} x\left(x^2+4x-1\right)dx$;

д) $\int_{1}^{5}\left((x-2)^2-1\right)dx$; е) $\int_{1}^{4}\left((x-3)^2-4\right)dx$;

ж) $\int_{0}^{2}\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$; з) $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

2. Найти интегралы заменой переменной интегрирования.

а) $\int_{0}^{1}(x+1)^5dx$; б) $\int_{0}^{1}\left(7x^2-5\right)^4dx$;

в) $\int_{1}^{4}\sqrt{x^2-1}dx$; г) $\int_{0}^{1}\sqrt{x-32}dx$;

д) $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{4-3x}}$; е) $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{10-3x}}$.

ж) $\int_{-2}^{2} e^{2x+1}dx$; з) $\int_{1}^{2} e^{3x+2}dx$;

и) $\int_{0}^{1} 5^{2x-1}dx$; к) $\int_{-1}^{1} 9^{6x-1}dx$;

л) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin 4x dx$; м) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\cos 3x dx$.

3. Применяя метод интегрирования по частям, найти следующие интегралы.

а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\cos x dx$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 4x\sin x dx$;

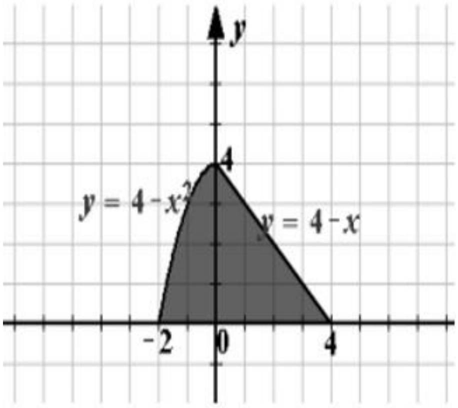
в) $\int\limits_1^{e} (x+1)\ln x dx$; г) $\int\limits_0^{e} x\ln x\, dx$;

д) $\int\limits_0^{1} (x^2-1)e^x dx$; е) $\int\limits_0^{1} (x^2-1)e^{3x} dx$;

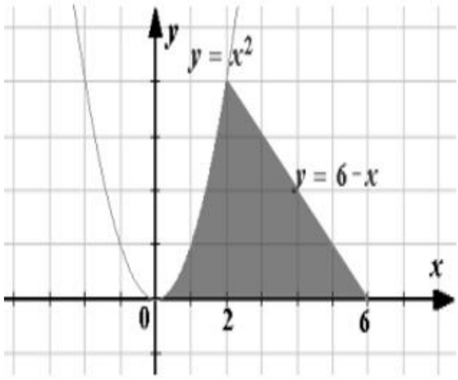
ж) $\int\limits_0^{1} \arcsin x dx$; з) $\int\limits_{-1}^{1} x\arcsin x dx$.

4. Вычислить площадь заштрихованной фигуры.

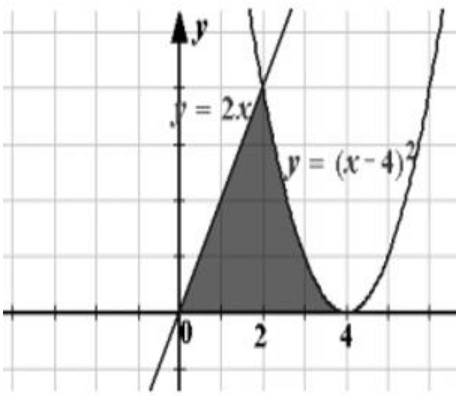
а)



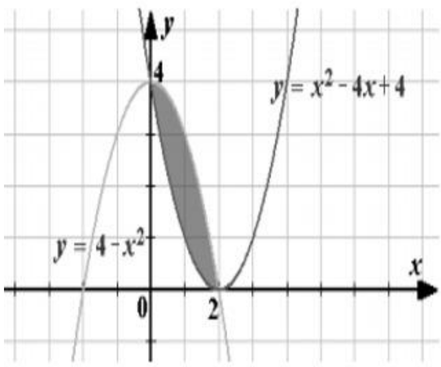
б)



в)



г)



5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

а) $y=-x^2$, $y=x$, $y=0$; б) $y=x^2-2$, $y=x$;

в) $y=4-x^2$, $y=x^2-2x$; г) $y=-x^2+x+4$, $y=-x+1$;

д) $y=x^2+2x$, $y-2x=1$; е) $y=\sqrt{x}$, $y=6-x$, $y=0$;

ж) $y=(x+2)^2$, $y=4$; з) $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$.

6. Вычислить объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций вокруг оси Ox.

а) $y=1-x^2,\ y=0$; б) $y=x^2,\ y^2-x=0$;

в) $y=2x-x^2,\ y=0$; г) $y^2=9x,\ y=3x$;

д) $y=4x-x^2,\ y=x$; е) $y=x^2,\ y^2=x$.

7. Вычислить объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций вокруг оси Oy.

а) $y=x^3,\ y=0,\ y=8$; б) $y=\dfrac{x^2}{2},\ x=0,\ y=2\sqrt{2}$;

в) $y=x^3,\ y=8,\ y=-8$; г) $y=x^2+1,\ x=1,\ x=2,\ y=0$;

д) $y^2=4-x,\ x=0$; е) $y=x^2,\ y=x$.

8. Скорость движения тела задана уравнением $v=v(t)$. Найти путь, пройденный телом за t секунд от начала движения.

а) $v=4t+5,\ t=5$; б) $v=t+6,\ t=4$;

в) $v=9t^2-8t,\ t=4$; г) $v=6t^2+2t,\ t=5$;

д) $v=t^3+5,\ t=2$; е) $v=\dfrac{5}{\sqrt{t}},\ t=9$.

9. Скорость поезда, движущегося под уклон, задана уравнением $v=v(t)$. Вычислите длину уклона, если поезд прошел его за t секунд.

а) $v=15+0,2t,\ t=15$; б) $v=14+0,3t,\ t=13$.

10. Поезд движется прямолинейно со скоростью $v=v(t)$ (м/с). Найти длину пути, пройденного поездом от начала движения до остановки.

а) $v=6t-t^2$; б) $v=12t-3t^2$.

11. Скорость движения тела изменяется по закону $v=v(t)$ (м/с). Найти длину пути, пройденного телом за 3-ю секунду его движения.

а) $v=2t$; б) $v=3t$;

в) $v=6t+4$; г) $v=8+2t$.

12. Тело брошено вертикально вверх со скоростью, которая изменяется по закону $v=v(t)$(м/с). Найти наибольшую высоту подъема.

а) $v=29,4-9,8t$; б) $v=25,6-6,4t$.

13. Два тела одновременно выходят из одной точки: одно – со скоростью $v_1 = v_1(t)$(м/с), другое – со скоростью $v_2 = v_2(t)$(м/с). На каком расстоянии друг от друга они окажутся через t с, если движутся по прямой в одном направлении?

а) $v_1 = 5t$, $v_2 = 3t^2$, $t = 20$; б) $v_1 = 7t$, $v_2 = 4t^2$, $t = 10$.

14. Задана функция предельных издержек $f(x) = 2x^2 - 2x + 90$. Найти функцию издержек $F = F(x)$ и вычислить издержки на изготовление 15 ед. товара.

15. Пусть $f(t) = -3t^2 + 18t$ – производительность труда. Определить выработку рабочего:

а) за весь рабочий день;

б) за третий час работы;

в) за последний час работы, если продолжительность рабочего дня 6 часов;

г) провести экономический анализ задачи.

16. Производительность труда рабочего времени в течение смены приблизительно выражается функцией $y = -0,0033x^2 - 0,089x + 20,96$, где x – время (ч), $x \in [0;8]$. Вычислить объем выпуска продукции в течение месяца, если количество рабочих дней равно 24.

РАЗДЕЛ 5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Понятие дифференциального уравнения, общее и частное решение дифференциального уравнения. Задача Коши. Дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Дифференциальные уравнения высших порядков. Уравнения, допускающие понижение порядка. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами.

1. Определить порядок заданных дифференциальных уравнений.

а) $y' + 3x^3 = 2xy$;

б) $y''' + 5y' - 9xy^4 = 0$;

в) $y^3 - 7x^5 y\cos x = 0$;

г) $\sqrt{1-\cos x}dx + \sqrt{1-\sin y}dy = 0$;

д) $y\sqrt{x} = y'$;

е) $xy - y^4 = 0$;

ж) $xy' - y = \cos x$;

з) $xy = y'''$.

2. Установите соответствие между дифференциальным уравнением и его видом.

1) $xy' - y^2 \ln x + y = 0$;

2) $\sqrt{x^2 + y^2} = y - xy'$;

3) $xy' - y = x^2 \cos x$;

4) $y' = \mathrm{tg} x \,\mathrm{tg} y$.

а) дифференциальное уравнение в частных производных;

б) линейное дифференциальное уравнение;

в) однородное дифференциальное уравнение;

г) дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

3. Установите соответствие между дифференциальным уравнением и его видом.

1) $y' + 2xy = x^2 e^{-x^2}$;

2) $y' + xy + (2-x)e^x y^2 = 0$;

3) $\left(1 + x^2\right)dy + ydx = 0$;

4) $xy' \sin\dfrac{y}{x} + x = y\sin\dfrac{y}{x}$.

а) дифференциальное уравнение в частных производных;

б) линейное дифференциальное уравнение;

в) однородное дифференциальное уравнение;

г) дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

4. Разделить переменные в уравнениях.

а) $x^2\left(y^3+5\right)dx+\left(x^3+5\right)dy=0$; б) $\left(x^2y-y\right)dy+\left(xy^2+x\right)dx=0$;

в) $y'=\dfrac{x}{y}$; г) $y'=\dfrac{x}{\sin y}$;

д) $y'=y^2\sqrt{4x^2-1}$; е) $y'=\left(1+x^2\right)\left(1-y^2\right)$.

5. Найти решение (общий интеграл) дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

а) $2ydy-3x^2dx=0$; б) $9y^2dy-4xdx=0$;

в) $xydx+\left(x+1\right)dy=0$; г) $x^2dy+\left(y-1\right)dx=0$;

д) $\left(x+xy\right)dx+\left(x-xy\right)dy=0$; е) $\left(x^2+1\right)dy-x(1+y)dx=0$;

ж) $x\sqrt{1-y^2}dx+y\sqrt{1-x^2}dy=0$; з) $\sqrt{1+y^2}dx=y\sqrt{1-x^2}dy$;

и) $\sqrt{y^2+1}dx=xydy$; к) $\sqrt{4+y^2}dx=\left(x^2y+y\right)dy$.

6. Найти решение (общий интеграл) дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

а) $ydx-e^x\left(2y^2+1\right)dy=0$; б) $\left(e^x+e^{x+y}\right)dx-e^ydy=0$;

в) $\sin xdx+4y^3dy=0$; г) $3x^2dx+\cos ydy=0$;

д) $3y^2y'=3x^2+1$; е) $x^2(2y-1)y'=\left(x^2-1\right)$;

ж) $yy'+x=1$; з) $xy'-y=0$;

и) $2xy'=1-y^2$; к) $2x^2yy'=2-y^2$;

л) $x\left(x-1\right)y'+y=y^2$; м) $\left(x^2-1\right)y'+2xy^2=0$.

7. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения.

а) $\left(x+2y\right)dx-xdy=0$; б) $\left(y^2-2xy\right)dx+x^2dy=0$;

в) $\left(xy+y^2\right)dx-x^2dy=0$; г) $\left(y+\sqrt{xy}\right)dx=xdy$;

д) $x^2y'=y^2+12x^2+8xy$; е) $x^2y'=y^2+4xy+2x^2$;

ж) $y'=\dfrac{x+y}{x}$; з) $y'=\dfrac{-3x+y}{x}$;

и) $y' = \dfrac{x+8y}{8x+y}$; к) $y' = \dfrac{2y+x}{2x-y}$;

л) $y' = \dfrac{x^3+y^3}{xy^2}$; м) $y' = \dfrac{3y^3-x^3}{3xy^2}$;

н) $y' = \dfrac{x+y}{y-x}+\dfrac{y}{x}-1$; о) $y' = \dfrac{x^2}{y^2-x^2}+\dfrac{y}{x}$.

8. Если в дифференциальном уравнении $y' = F(x,y)$ функцию $F(x,y)$ можно записать в виде $f\left(\dfrac{y}{x}\right)$, то дифференциальное уравнение $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ называется дифференциальным уравнением первого порядка с однородной правой частью. Подстановка $y = u\cdot x$ сводит решение этого уравнения к решению уравнения с разделяющимися переменными вида $P(u)du + Q(x)dx = 0$. Для однородного уравнения $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ найти соответствующее уравнение с разделяющимися переменными.

а) $y' = \dfrac{4x+y}{x}$; б) $y' = \dfrac{-2x+y}{x}$;

в) $y' = \dfrac{3x}{x+y}$; г) $y' = \dfrac{-5x}{x+y}$;

д) $y' = \dfrac{y}{x}-1$; е) $y' = \dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$;

ж) $y' = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}+\dfrac{y}{x}$; з) $y' = \dfrac{-x^2+6y^2}{x^2}+\dfrac{y}{x}$.

9. Линейное дифференциальное уравнение вида $y' + P(x)\cdot y = Q(x)$ называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Для его решения используют подстановку: $y = u\cdot v$, тогда $y' = u'\cdot v + u\cdot v'$. Сделав подстановку в исходное уравнение, выносят за скобки u и выражение, стоящее в скобках, приравнивают к нулю. Из полученного уравнения находят v. Остается решить дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Найти функцию v для дифференциального уравнения.

а) $y' + x^2\cdot y = 3x$; б) $y' + y\cdot x^3 = 5x^2$;

в) $y' + \dfrac{y}{x} = x^3$; г) $y' + y\cdot\dfrac{x+1}{x} = 2x^2$;

д) $y' + 7y\cdot x = e^x$; е) $y' - e^x\cdot y = x^3$;

ж) $y' + y \cdot \sin x = \cos x$; з) $y' - y \cdot \cos x = \sin x$.

10. Линейное дифференциальное уравнение можно решить с помощью подстановки $y = u \cdot v$, где функция $v = v(x)$ подбирается так, чтобы после подстановки получилось уравнение с разделяющимися переменными. Найти общее решение уравнения.

а) $y' + 2y - 1 = 0$; б) $y' - 3y + 3 = 0$;

в) $y' + \dfrac{y}{x} = 3x$; г) $y' - \dfrac{y}{x} = x$;

д) $y' + y - e^{-x} = 0$; е) $y' - y - e^{x} = 0$.

11. Найти общее решение линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка.

а) $y'' - 5y' + 4y = 0$; б) $y'' - 6y' + 9y = 0$;

в) $y'' + 8y' + 25y = 0$; г) $y'' - 3y' + 2y = 0$;

д) $y'' - 4y' + 4y = 0$; е) $y'' - 2y' + 2y = 0$;

ж) $y'' - 4y' + 3y = 0$; з) $y'' + y = 0$;

и) $y'' - 2y' + 5y = 0$; к) $y'' + 4y' = 0$.

12. Найти общее решение дифференциального уравнения.

а) $y'' = \dfrac{8}{x^3}$; б) $y'' = \dfrac{9}{x^4}$;

в) $y'' = e^{-x}$; г) $y'' = e^{\frac{x}{2}}$;

д) $y'' = \sin 2x$; е) $y'' = \cos \dfrac{x}{5}$.

РАЗДЕЛ 6. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Элементы комбинаторики: перестановки, размещения, сочетания. Основные понятия теории вероятностей. Классическое, геометрическое и статистическое определение вероятности. Теорема сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

1. Пароль состоит из n букв слова A. Каждая буква может встречаться ровно один раз. Какое максимальное количество паролей возможно?

а) $n=3$, $A=код$; б) $n=4$, $A=пять$;
в) $n=5$, $A=сумма$; г) $n=6$, $A=анализ$;
д) $n=9$, $A=множество$; е) $n=10$, $A=математика$.

2. Код замка состоит из n цифр. Каждая цифра встречается ровно один раз. Какое максимальное количество замков с такими кодами возможно?

а) $n=2$ цифры: 5 и 7;
б) $n=7$, цифры: 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9;
в) $n=8$, цифры: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9.

3. Из n учащихся нужно отобрать по одному человеку для участия в городских олимпиадах по k дисциплинам.Каждый из учащихся участвует только в одной олимпиаде. Сколькими способами это можно сделать?

а) $n=15$, $k=2$; б) $n=16$, $k=3$;
в) $n=17$, $k=4$; г) $n=18$, $k=2$;
д) $n=19$, $k=3$; е) $n=20$, $k=4$.

4. В вагоне имеется n свободных мест. В вагон вошли k пассажиров. Сколькими способами они могут разместиться в этом вагоне на свободных местах?

а) $n=10$, $k=6$; б) $n=9$, $k=4$;
в) $n=11$, $k=5$; г) $n=20$, $k=13$;
д) $n=15$, $k=9$; е) $n=24$, $k=10$.

5. Учащиеся школы изучают n различных предметов. Сколькими способами можно составить расписание уроков на один день, чтобы в нем было k различных предметов?

а) $n=10$, $k=5$; б) $n=10$, $k=6$;
в) $n=11$, $k=5$; г) $n=11$, $k=6$;
д) $n=12$, $k=5$; е) $n=12$, $k=6$.

6. Сколько вариантов экзаменационных билетов из k вопросов можно создать, имея список из n вопросов?

а) $n=30,\ k=2$; б) $n=30,\ k=3$;

в) $n=35,\ k=2$; г) $n=35,\ k=3$;

д) $n=40,\ k=2$; е) $n=40,\ k=3$.

7. Сколькими способами можно выбрать k дежурных из класса, в котором n человек?

а) $n=25,\ k=3$; б) $n=25,\ k=4$;

в) $n=25,\ k=5$; г) $n=26,\ k=3$;

д) $n=27,\ k=4$; е) $n=28,\ k=5$.

8. В наборе n карандашей. Надо выбрать k карандашей (порядок выбора цвета карандаша не важен). Сколькими способами можно сделать выбор?

а) $n=12,\ k=3$; б) $n=12,\ k=5$;

в) $n=18,\ k=4$; г) $n=18,\ k=6$;

д) $n=24,\ k=8$; е) $n=24,\ k=10$.

9. Среди a изделий встречается b нестандартных. Найти вероятность того, что наугад взятое изделие окажется нестандартным.

а) $a=200,\ b=15$; б) $a=100,\ b=4$;

в) $a=50,\ b=2$; г) $a=10,\ b=2$;

д) $a=16,\ b=4$; е) $a=20,\ b=5$.

10. Среди a изделий встречается b нестандартных. Найти вероятность того, что наугад взятое изделие окажется стандартным.

а) $a=6,\ b=2$; б) $a=50,\ b=10$;

в) $a=44,\ b=4$; г) $a=15,\ b=3$;

д) $a=25,\ b=5$; е) $a=36,\ b=6$.

11. В урне n шаров, имеющих номера: $1,2,3...,n$. Найти вероятность того, что наугад выбранный шар имеет:

а) $n=10$, номер больший 3, но меньший 8;

б) $n=15$, номер больший 5, но меньший 14;

в) $n=20$, номер больший 11, но меньший 17;

г) $n=25$, номер больший 15, но меньший 25;

д) $n=30$, номер больший 21, но меньший 28;

е) $n=35$, номер больший 17, но меньший 33.

12. В урне n шаров, имеющих номера: $1,2,3...,n$. Найти вероятность того, что наугад выбранный шар имеет:

а) $n=4$, номер больший 2;	б) $n=6$, номер меньший 5;
в) $n=8$, номер больший 1;	г) $n=10$, номер меньший 10;
д) $n=12$, номер больший 4;	е) $n=14$, номер меньший 11.

13. В корзине находятся n шаров: a шаров красного цвета, b - синего, остальные белые. Найти вероятность того, что наугад взятый шар окажется белым.

а) $n=20,\ a=3,\ b=2$;	б) $n=80,\ a=19,\ b=26$;
в) $n=36,\ a=9,\ b=7$;	г) $n=60,\ a=11,\ b=14$;
д) $n=49,\ a=31,\ b=11$;	е) $n=12,\ a=5,\ b=4$.

14. На отрезок AB длины 240 наудачу поставлена точка X . Найдите вероятность того, что меньший из отрезков AX и XB имеет длину меньшую, чем 48.

15. Два лица X и Y договорились о встрече между 9 и 10 часами утра. Если первым приходит X, то он ждет Y в течение 5 минут. Если первым приходит Y , то он ждет X в течение 10 минут. Считая, что момент прихода на встречу выбирается каждым «наудачу» в пределах указанного часа, найти вероятность того, что встреча состоится.

16. На экзамене по геометрии школьнику достаётся одна задача из сборника. Вероятность того, что эта задача по теме «Углы», равна a. Вероятность того, что это окажется задача по теме «Параллелограмм», равна b. В сборнике нет задач, которые одновременно относятся к этим двум темам. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется задача по одной из этих двух тем.

а) $a=0,1,\ b=0,6$;	б) $a=0,15,\ b=0,45$;
в) $a=0,2,\ b=0,3$;	г) $a=0,25,\ b=0,55$;
д) $a=0,4,\ b=0,5$;	е) $a=0,25,\ b=0,35$.

17. В ящике лежат n шаров, из которых a белых, b красных и c - зеленых. Наугад берется один шар. Какова вероятность того, что этот шар цветной?

а) $n=9,\ a=2,\ b=3, c=4$;	б) $n=12,\ a=3,\ b=4, c=5$;
в) $n=15,\ a=4,\ b=5, c=6$;	г) $n=18,\ a=5,\ b=6, c=7$;
д) $n=21,\ a=6,\ b=7, c=8$;	е) $n=24,\ a=7,\ b=8, c=9$.

18. В магазине канцтоваров продается n ручек, из них a красных, b зеленых и c - фиолетовых, еще есть синие и черные, их поровну. Найдите вероятность того, что Алиса наугад вытащит синюю или зеленую ручку.

а) $n=120$, $a=15$, $b=22, c=27$; б) $n=120$, $a=20$, $b=35, c=15$;
в) $n=110$, $a=18$, $b=11, c=21$; г) $n=110$, $a=37$, $b=25, c=8$;
д) $n=100$, $a=24$, $b=30, c=16$; е) $n=100$, $a=41$, $b=15, c=24$.

19. По мишени по одному разу стреляют два стрелка. Вероятность попадания первого стрелка в мишень равна a, второго -b. Какова вероятность того, что кто-нибудь из них попадет в мишень?

а) $a=0,7$, $b=0,8$; б) $a=0,35$, $b=0,25$;
в) $a=0,4$, $b=0,1$; г) $a=0,24$, $b=0,19$;
д) $a=0,5$, $b=0,6$; е) $a=0,01$, $b=0,05$.

20. Согласно прогнозу метеорологов, дождь может пойти с вероятностью a, а снег – с вероятностью b. Найти вероятность того, что будет снег с дождем.

а) $a=0,4$, $b=0,7$; б) $a=0,25$, $b=0,45$;
в) $a=0,2$, $b=0,6$; г) $a=0,63$, $b=0,03$;
д) $a=0,9$, $b=0,5$; е) $a=0,02$, $b=0,08$.

20. Имеются два ящика с деталями. Вероятность вынуть бракованную деталь из первого ящика равна a, а из второго - b. Наугад вынимают по одной детали из каждого ящика. Найти вероятность того, что обе детали окажутся бракованными.

а) $a=\frac{1}{25}$, $b=\frac{5}{33}$; б) $a=\frac{1}{40}$, $b=\frac{1}{30}$;
в) $a=\frac{1}{20}$, $b=\frac{2}{15}$; г) $a=\frac{2}{15}$, $b=\frac{3}{34}$;
д) $a=\frac{2}{15}$, $b=\frac{3}{20}$; е) $a=\frac{3}{5}$, $b=\frac{3}{4}$.

21. В первой урне a черных и b белых шаров, во второй c - черных и d белых шаров. Из каждой урны вынули по одному шару. Найти вероятность того, что оба вынутых шара будут черными.

а) $a=2$, $b=1$ и $c=6$, $d=2$; б) $a=9$, $b=1$ и $c=1$, $d=5$;
в) $a=10$, $b=2$ и $c=4$, $d=8$; г) $a=5$, $b=6$ и $c=2$, $d=3$;
д) $a=6$, $b=11$ и $c=17$, $d=7$; е) $a=8$, $b=3$ и $c=5$, $d=7$.

22. В первой урне a белых и b черных шаров, во второй c - белых и d черных шаров. Из каждой урны вынули по одному шару. Найти вероятность того, что оба вынутых шара будут белыми.

а) $a=4$, $b=7$ и $c=3$, $d=1$; б) $a=12$, $b=10$ и $c=10$, $d=6$;
в) $a=8$, $b=4$ и $c=2$, $d=6$; г) $a=4$, $b=6$ и $c=11$, $d=9$;
д) $a=5$, $b=5$ и $c=2$, $d=18$; е) $a=5$, $b=4$ и $c=9$, $d=6$.

23. Имеется три одинаковые урны: в первой урне два белых и один черный шар; во второй – три белых и один черный; в третьей – два белых и два черных. Некто выбирает наугад одну из урн и вынимает из нее один шар. Какова вероятность, что вынутый шар белый?

24. В первом ящике 3 белых, 5 черных и 2 красных шара. Во втором ящике 2 белых, 1 черный и 3 красных шара. Втретьем ящике 4 белых, 3 черных и 5 красных шаров. Наудачу выбрали ящик и из него достали один шар. Найти вероятность того, что он белый.

25. В ящике содержится $n_1 = 6$ деталей, изготовленных на заводе 1, $n_2 = 5$ деталей – на заводе 2 и $n_3 = 6$ деталей – на заводе 3. Вероятности изготовления брака на заводах с номерами 1, 2 и 3 соответственно равны: $p_1 = 0{,}04, p_2 = 0{,}02, p_3 = 0{,}03$. Найдите вероятность того, что извлеченная наудачу деталь окажется качественной.

26. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по одной мишени, делая по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень первого стрелка равна $p_1 = 0{,}8$, а второго – $p_2 = 0{,}4$. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Найти вероятность того, что попал первый стрелок.

27. Ученик 6б класса Костя Сидоров и его приятель, заняв выгодную позицию вблизи школьных дверей, обстреливали снежками всех выходящих девчонок. Известно, что Костя обычно попадает8 раз из 10, а его приятель только 7, при этом приятель более расторопен и в 60% случаев успевает бросить снежок первым. Когда дверьв очередной раз открылась, первый снежок поразил застывшего на пороге завуча Маргариту Викентьеву, а второй разбился о стену. Каковавероятность того, что метким стрелком был Костя?

28. Симпатичная студентка Люся Копейкина вместе сподругой готовилась к зачету. Они успели выучить только 15 вопросовиз 30. По жребию Люсе выпало идти первой, а ее подруге –второй.Люся считает, что подруге

повезло больше, так как шансы вытянутьсчастливый билет увеличатся. Права ли она? Зависит ли вывод от числавыученных билетов?

29. В пирамиде пять винтовок, три из которых снабженыоптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишеньпри выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет одинвыстрел из наудачу взятой винтовки.

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Генеральная и выборочная совокупности. Вариационный ряд и его графическое изображение. Числовые характеристики вариационных рядов.

1. Выборка задана в виде распределения частот. Найдите объем выборки.

а)

x_i	2	5	7	10	11	12	14	16	17	19
n_i	1	3	2	4	5	3	7	10	12	10

б)

x_i	4	7	8	12	15	16	18	21	25	27
n_i	5	2	3	10	1	4	8	11	10	5

в)

x_i	2	5	7	8	9	11	12	14	16	22
n_i	3	4	5	2	3	8	9	12	15	18

г)

x_i	2	4	5	7	10	12	13	14	16	18
n_i	15	20	10	10	45	26	32	9	4	1

д)

x_i	34	36	37	38	40	42	45	46	47	49
n_i	20	50	18	12	17	21	10	5	3	1

е)

x_i	18	19	21	24	25	27	30	31	32	34
n_i	4	3	6	7	5	9	8	7	10	15

2. Выборказадана в виде распределения частот. Найти n_i.

а)

x_i	24	25	26	27	28	29
n_i	12	13	14	15	16	n_6

б)

x_i	15	16	17	18	19	20
n_i	n_1	8	9	10	11	12

в)

x_i	11	13	15	17	19	21
n_i	11	12	13	n_4	15	16

г)

x_i	3	4	5	6	7	8
n_i	4	5	6	7	n_5	9

д)

x_i	20	21	22	23	24	25
n_i	12	n_2	13	14	16	17

3. Выборка задана в виде распределения частот.

а) Чему равна относительная частота варианты $x_8 = 16$?

x_i	2	5	7	10	11	12	14	16	17	19
n_i	1	3	2	4	5	3	7	10	12	8

б)Чему равна относительная частота варианты $x_{10} = 19$?

x_i	2	5	7	10	11	12	14	16	17	19
n_i	1	3	2	4	5	3	7	8	12	10

в)Чему равна относительная частота варианты $x_3 = 7$?

x_i	2	5	7	10	11	12	14	16	17	19
n_i	1	3	2	4	5	3	7	10	12	8

г) Чему равна относительная частота варианты $x_4 = 10$?

x_i	2	5	7	10	11	12	14	16	17	19
n_i	1	3	2	4	5	3	7	10	12	8

д)Чему равна относительная частота варианты $x_2 = 5$?

x_i	2	5	7	10	11	12	14	16	17	19
n_i	1	3	2	4	5	3	7	10	12	8

4.На телефонной станции проводились наблюдения над числом неправильных соединений в минуту. Наблюдения в течение 30 минут дали следующие результаты:

3	0	1	5	1	2	4	5	3	4
2	4	2	0	2	3	1	3	2	1
4	3	0	2	1	0	4	2	3	2

Требуется:

а) построить дискретный вариационный ряд распределения числа неисправных соединений в минуту;

б)дать графическое изображение ряда;

в)вычислить числовые характеристики ряда.

5. В обувном магазине за день продали 30 пар мужской обувиследующих размеров:

39	41	40	42	41	40	42	44	42	43
42	41	43	39	42	39	41	43	41	38
43	42	41	40	41	38	44	40	39	44

Требуется:

а) построить дискретный вариационный ряд распределения по продажам мужской обуви;

б) дать графическое изображение ряда;

в)вычислить числовые характеристики ряда.

6. В супермаркете фиксировали, сколько покупателей обслуживали в кассе за один час. Наблюдения в течение 30 часов (15 дней с 9 до 10 и с 10 до 11 часов)дали следующие результаты:

70	75	100	120	75	60	100	120	70	60
65	100	65	100	70	75	60	100	120	70

75	70	120	65	70	75	70	100	100	65

Требуется:

а) построить дискретный вариационный ряд распределения покупателей, которые были обслужены на кассе за один час;

б) дать графическое изображение ряда;

в) вычислить числовые характеристики ряда.

7. Измерение роста детей младшей группы детского сада представлено выборкой:

92	96	95	96	94	97	98	94	95	96
96	95	94	98	97	94	96	95	96	92
95	95	92	94	95	98	94	98	98	95

Требуется:

а) построить дискретный вариационный ряд распределения детей младшей группы детского сада по росту;

б) дать графическое изображение ряда;

в) вычислить числовые характеристики ряда.

8. Исследуя рост учащихся (в сантиметрах) в студенческой группе из 30 человек. Получена выборка из следующих значений:

184	182	182	180	177	179	173	179	188	173
190	166	177	186	170	178	185	173	179	167
179	173	179	166	170	190	167	188	180	190

Требуется:

а) построить интервальный вариационный ряд распределения учащихся по росту, выделив 4 группы с равными интервалами, по каждой группе подсчитать общий рост учащихся, см;

б) дать графическое изображение ряда;

в) вычислить числовые характеристики ряда.

9. Имеются данные о величине полученной прибыли 30 предприятий, млн. руб.

23	48	91	46	75	100	36	115	112	71
80	57	12	118	10	16	22	27	48	56

87	45	98	88	63	33	50	55	94	36

Требуется:

а) построить интервальный вариационный ряд распределения учащихся по росту, выделив 3 группы с равными интервалами, по каждой группе подсчитать общий объем прибыли (млн. руб.);

б) дать графическое изображение ряда;

в) вычислить числовые характеристики ряда.

10. Имеются данные о величине вклада в банке 30 вкладчиков, тыс. руб.:

150	120	300	650	1500	900	450	500	380	440
600	80	150	180	250	350	90	470	1100	800
500	520	480	630	650	670	220	140	680	320

Требуется:

а) построить интервальный вариационный ряд распределения вкладчиков, по размеру вклада выделив 4 группы с равными интервалами, по каждой группе подсчитать общий размер вкладов (тыс. руб.);

б) дать графическое изображение ряда;

в) вычислить числовые характеристики ряда.

11. Имеется информация о количестве книг, полученных студентами по абонементу за прошедший учебный год:

8	4	5	6	13	10	12	9	7	7
8	10	4	4	9	4	3	5	2	11
2	13	11	3	14	11	14	6	7	6

Требуется:

а) построить интервальный вариационный ряд распределения количества книг, полученных студентами по абонементу, выделив 3 группы с равными интервалами, по каждой группе подсчитать общее количество книг;

б) дать графическое изображение ряда;

в) вычислить числовые характеристики ряда.

12. Скорость автомобилей, проезжавших перекресток, составила (км/ч): 55, 52, 50, 40, 38, 69, 32, 31, 52, 55, 32, 60, 40, 40, 56, 37, 54, 40. Найти размах, среднее арифметическое, моду и медиану.

13. Напряжение в электрической сети составило (вольт): 230, 227, 214, 242, 223, 242, 223, 242, 220, 212, 241, 239, 223, 242, 227, 214, 214, 223, 223. Найти размах, среднее арифметическое, моду и медиану.

14. Посещаемость сайта за 14 дней месяца образует ряд: 5300, 5000, 5000, 5100, 5099, 4600, 4597, 4170, 4900, 5000, 4150, 5000, 5099, 5000. Найти размах, среднее арифметическое, моду и медиану.

15. Подсчитали объем продаж магазина в течение 17 дней (в тыс. руб.): 41, 40, 35, 42, 45, 39, 33, 37, 31, 29, 41, 41, 40, 40, 29, 40, 33. Найти размах, среднее арифметическое, моду и медиану.

16. Количество опозданий на 10 лекций составило: 4, 3, 3, 1, 3, 3, 4, 6, 1, 3. Найти среднее арифметическое, моду и медиану.

17. Дан статистический ряд распределения. Найти числовые характеристики ряда.

а)

x_i	15	19	20	23	25	28
n_i	7	11	40	2	25	15

б)

x_i	15	19	20	23	25	28
n_i	7	11	24	34	9	15

в)

x_i	15	19	23	27	31	35
n_i	7	11	24	30	9	10

г)

x_i	10	12	14	16	18	20
n_i	7	11	19	4	9	25

д)

x_i	15	16	17	18	19	20
n_i	10	11	5	9	12	8

РАЗДЕЛ 7. ЭЛЕМЕНТЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Понятие множества. Подмножество. Способы задания множеств. Операции над множествами и их свойства. Декартово произведение множеств. Булевы функции. Формулы алгебры логики. Основные законы алгебры логики.

1. Числовые множества – это множества, элементами которых являются числа. Примеры таких множеств:

N – множество натуральных чисел,

Z – множество целых чисел,

Q – множество рациональных чисел,

R – множество действительных чисел,

C – множество комплексных чисел.

Указать каким из этих множеств чисел принадлежат множества A, B, C, D, E, F?

а) $A=\left\{3;-\dfrac{12}{17};-1;\sqrt{7};2,3\right\}$; б) $B=\left\{3;5;3+5i;\sqrt{8}\right\}$;

в) $C=\left\{-4;5;-1\dfrac{4}{5};\sqrt{2}\right\}$; г) $D=\left\{2;0;\dfrac{1}{4};100;-1+i\right\}$;

д) $E=\left\{-5;4;-\dfrac{3}{2};2\dfrac{3}{7};\sqrt{11}\right\}$; е) $F=\left\{\dfrac{3}{5};-12;1+2i;\sqrt{5};5,3\right\}$.

2. Множество A задать перечислением его элементов.

а) $A=\{x\,|\,2\le x\le 5; x\in N\}$; б) $A=\{x\,|\,1\le x\le 7; x\in N\}$;

в) $A=\{x\,|\,-2\le x\le 2; x\in Z\}$; г) $A=\{x\,|\,-4\le x\le 4; x\in Z\}$;

д) $A=\{x\,|\,2\le x\le 9; x=2n; n\in N\}$; е) $A=\{x\,|\,3\le x\le 33; x=3n; n\in N\}$;

ж) $A=\{x\,|\,1\le x\le 15; x=5n; n\in N\}$; з) $A=\{x\,|\,1\le x\le 22; x=7n; n\in N\}$.

3. Для следующих множеств A, B найдитемножества: 1)$A\cup B$, 2)$A\cap B$, 3)$A\setminus B$, 4)$B\setminus A$, 5)$A\times B$, 6)$\bar{A}$, 7)$\bar{B}$. Если дан универсум $U=\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$.

а) $A=\{1,2,3\}$, $B=\{3,4,5\}$; б) $A=\{0,1\}$, $B=\{1,2,3\}$;

в) $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,2,3,4,5\}$; г) $A=\{4,6\}$, $B=\{1,3,4,5\}$;

д) $A=\{3,4,5,6\}$, $B=\{4,5\}$; е) $A=\{5,6,8\}$, $B=\{4,5,7\}$;

ж) $A=\{5,6,7,8\}$, $B=\{2,4,6,8\}$; з) $A=\{1,2,4\}$, $B=\{0,2,4,6\}$.

4. Запишите результаты объединения, пересечения и разности множеств A и B (для вычитания – $A \setminus B$ и $B \setminus A$).

а) $A=\{k,l,f,t,u\}$, $B=\{k,l,m,n,u\}$;

б) $A=\{b,e,f,k,t\}$, $B=\{f,i,j,k,t\}$;

в) $A=\{j,k,l,y\}$, $B=\{i,j,s,t,u,y\}$;

г) $A=\{b,c,h,i,j\}$, $B=\{e,h,i,c,b\}$;

д) $A=\{a,b,j,k,l,m\}$, $B=\{a,h,m\}$;

е) $A=\{g,h,j,k\}$, $B=\{g,j,q\}$;

ж) $A=\{c,e,h,n\}$, $B=\{t,k,h,n\}$;

з) $A=\{h,i,s\}$, $B=\{c,g,j,v\}$.

5. Для следующих множеств A, B и универсального множества $U=R$ найдитемножества: 1) $A\bigcup B$, 2) $A\bigcap B$, 3) $A\setminus B$, 4) $B\setminus A$, 5) $\bar{A}$, 6) $\bar{B}$, 7) $B\setminus\bar{A}$, 8) $A\setminus\bar{B}$.

а) $A=[1,10)$, $B=(7,8)$; б) $A=(-\infty,3)$, $B=[2,7]$;

в) $A=(-\infty,2)$, $B=[1,+\infty)$; г) $A=(-3,2)$, $B=(-2,+\infty)$;

д) $A=(2,+\infty)$, $B=[2,4]$; е) $A=[-1,2)$, $B=(1,+\infty)$;

ж) $A=(4,5)$, $B=[3,4]$; з) $A=(-8,4)$, $B=[2,3]$.

6. Для следующих множеств A, B и универсального множества U найдитемножества: $A\bigcup B, A\bigcap B, A\setminus B, B\setminus A, \bar{A}, \bar{B}$.

а) $A=\{2,4,6,8\}, B=\{3,4,5,6,7\}, U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$;

б) $A=\{1,3,5,7,9\}, B=\{2,3,4,6\}, U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$;

в) $A=(-\infty;1]\cup[3;4]\cup[5;+\infty), B=(-1,2)\cup[4;5]\cup(6;+\infty), U=\mathbb{R}$;

г) $A=(-\infty;2]\cup\{4\}\cup(6;9], B=[1;4)\cup\{7\}\cup(8;+\infty), U=\mathbb{R}$.

7. Даны множества $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $A=\{1,3,5,7,9\}$, $B=\{1,2,3,8,9\}$, $C=\{2,3,5,6,9\}$. Найти:

а) $A\bigcap B\bigcup C$; б) $\overline{A\bigcap B}\bigcup C$;

в) $A\bigcap\overline{B\bigcup C}$; г) $\overline{A\bigcap B\bigcup C}$.

8. Даны множества $U=\{5,6,7,8,9,10,11\}$, $A=\{5,7,9\}$, $B=\{2,3,8,10,11\}$, $C=\{6,9\}$. Найти:

а) $A\bigcup B\bigcup C$; б) $\overline{A\bigcap B}\bigcup C$;

в) $A\bigcap\overline{B\bigcup C}$; г) $\overline{A\bigcap B\bigcup C}$.

9. Для данных множеств A и B найти прямое произведение $A\times B$.

а) $A=\{2;3;5\}$, $B=\{3;4\}$; б) $A=\{a;b\}$, $B=\{2;4\}$;

в) $A=\{4;5;6\}$, $B=\{a;b\}$; г) $A=\{1;a\}$, $B=\{2;b\}$;

д) $A=\{a;b\}$, $B=\{c;d\}$; е) $A=\{g;f;d\}$, $B=\{g;f\}$.

10. Для данных множествA и B найти $A\times B$, $B\times A$ и дать геометрическую интерпретацию полученного декартова произведения.

а) $A=(-5;+\infty), B=(-\infty;10]$; б) $A=(1;6), B=[2;3]$;

в) $A=(-8;5), B=[0;19]$; г) $A=(-8;5), B=[1;6]$;

д) $A=(-8;8), B=[-11;11]$; е) $A=(-1;2), B=[-1;10]$.

11. Известно, что $A\bigcup B=C$ и $x\in C$. Можно ли на основании этого утверждать, что:

а) $x\in A$; б) $x\in B$;

в) $x\notin A$; г) $x\notin B$;

д) $x\in A$или $x\in B$; е) $x\in A$и $x\in B$.

12. Изобразить на диаграмме Эйлера – Венна множества.

а) $(A\setminus B)\bigcup C$; б) $B\bigcup(A\setminus C)$;

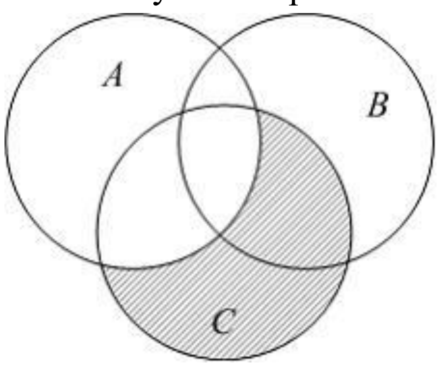
в) $(A\bigcup B)\setminus C$; г) $A\setminus(B\setminus C)$;

д) $(A\setminus B)\bigcup(A\bigcap C)$; е) $A\setminus(B\bigcup C)$;

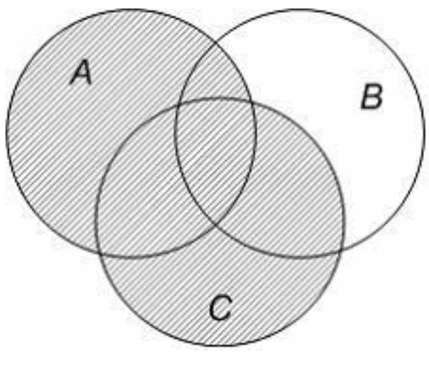
ж) $(\bar{B}\cup A)\setminus C$; з) $(A\bigcup C)\bigcap(A\bigcup\bar{B})$.

13. Пусть на рисунке изображены множества A, B и C. Какому множеству соответствует заштрихованная область?

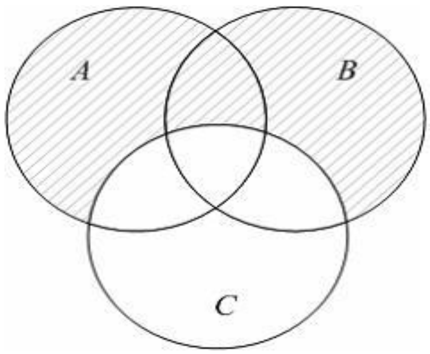
а)



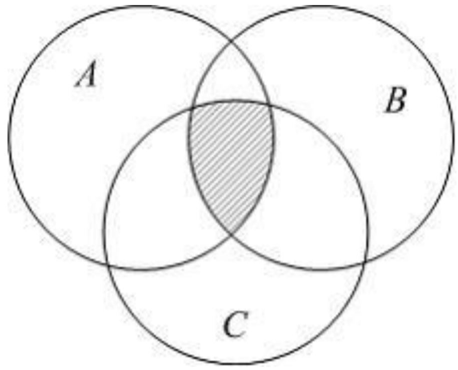
б)



в)



г)



14. Используя диаграммы Эйлера-Венна, покажите справедливость следующих тождественных соотношений алгебры множеств.

а) $(A\bigcup B)\bigcap C=(A\bigcap C)\bigcup(B\bigcap C)$; б) $\overline{A\bigcup B}=\bar{A}\bigcap\bar{B}$;

в) $(A\bigcap B)\bigcup C=(A\bigcup C)\bigcap(B\bigcup C)$; г) $\overline{A\bigcap B}=\bar{A}\bigcup\bar{B}$.

15. Упростите следующие выражения, если $A\subseteq B$.

а) $A\bigcap B$; б) $A\bigcup B$; в) $A\setminus B$.

16. Используя свойства операции над множествами, упростите выражения.

а) $(A\bigcap B)\bigcap\bar{B}$; б) $\overline{(A\bigcup B)}\bigcap B$;

в) $\overline{(A\bigcap B)}\bigcup A$; г) $\overline{(A\bigcup B)}\bigcup B$;

д) $(A\bigcap B)\bigcap(A\bigcap\bar{B})$; е) $A\bigcap(A\bigcap B)\bigcup\bar{B}$.

17. В студенческом потоке 40 человек хорошо знают математику, а 25 человек – электронику, и 10 человек хорошо знают и математику и электронику. Если в потоке каждый из студентов знает хотя бы один из этих предметов, то сколько студентов в потоке?

18. В группе из100 человек 70 человек знают английский язык,45 знают французский и 23 человека знают оба языка. Сколько человек в группе не знают ни английского, ни французского языка?

19. Из 100 студентов английский язык изучают 28 человек, немецкий – 30, французский – 42, английский и немецкий – 8, английский и французский – 10, немецкий и французский – 5, все три языка изучают 3 студента. Сколько студентов изучают только один язык?

20. Составить таблицу истинности для формул логики.

а) $(x\vee\bar{y})\,|\,(x\sim y\wedge z)$; б) $\bar{x}\to(z\sim(y\vee x\wedge z))$;

в) $(x \wedge z \to y) \mid (x \wedge y \vee x \wedge z)$; г) $(\bar{x} \vee y) \downarrow \bar{z}((x \vee y) \mid z)$;

д) $(x \sim \bar{y}) \mid (x \downarrow (\bar{y} \wedge z \vee \bar{x}))$; е) $((x \vee \bar{y}) \wedge z) \to ((x \sim z) \vee y)$;

ж) $(x \vee \bar{y}) \wedge z \to (z \sim (y \downarrow (x \vee \bar{z}))$; з) $((x \vee \bar{y}) \wedge z) \to (x \sim y)$;

и) $((x \sim z) \vee y) \wedge (x \mid y \wedge z)$; к) $\bar{x} \to (\bar{z} \sim (y \vee x \wedge z)$;

л) $(x \wedge \bar{y}) \mid (x \sim y \wedge z)$; м) $((x \downarrow \bar{y}) \wedge z) \to ((x \sim z) \vee y)$.

21. Применяя таблицы истинности, доказать равносильность формул.

а) $x \wedge 0 = 0$; б) $x \vee 0 = x$;

в) $x \wedge \bar{x} = 0$; г) $x \vee \bar{x} = 1$;

д) $x \vee 1 = 1$; е) $x \wedge 1 = x$;

ж) $x \vee x = x$; з) $x \wedge x = x$;

и) $x \vee (x \wedge y) = x$; к) $x \wedge (x \vee y) = x$;

л) $x \vee y = y \vee x$; м) $x \wedge y = y \wedge x$;

н) $\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$; о) $\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$;

п) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$; р) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$;

с) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$; т) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

РАЗДЕЛ 8. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

ПОГРЕШНОСТЬ РЕЗУЛЬТАТА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Приближенные числа. Абсолютная и относительная погрешность. Десятичная запись приближенных чисел. Значащая цифра числа. Верная значащая цифра. Округление чисел. Действия над приближенными числами.

1. При вычислении выражения z данные в условии задачи значения x и y округлили до целых значений и получили z_1. Найти абсолютную погрешность полученного результата.

а) $z=2\cdot x-y$, $x=12,4$, $y=3,1$, $z_1=2\cdot 12-3=21$;

б) $z=x-2\cdot y$, $x=10,1$, $y=2,2$, $z_1=10-2\cdot 2=6$;

в) $z=5\cdot x-2\cdot y$, $x=200,1$, $y=49,8$, $z_1=5\cdot 200-2\cdot 50=900$;

г) $z=2\cdot x-3\cdot y$, $x=20,1$, $y=5,2$, $z_1=2\cdot 20-3\cdot 5=25$;

д) $z=3\cdot x-4\cdot y$, $x=99,9$, $y=50,2$, $z_1=3\cdot 100-4\cdot 50=100$.

2. Для вычисления площади стены измерили ее длину и ширину. Получили a см и b см. Округлив полученныерезультаты до a_1 см и b_1 см соответственно, вычислили площадь стены S (кв. см.) Найти относительную погрешность полученного результата.

а) $a=603$, $b=245$, $a_1=600$, $b_1=250$, $S=600\cdot 250$;

б) $a=122$, $b=58$, $a_1=120$, $b_1=60$, $S=120\cdot 60=7200$;

в) $a=12$, $b=19$, $a_1=10$, $b_1=20$, $S=10\cdot 20=200$;

г) $a=56$, $b=73$, $a_1=60$, $b_1=70$, $S=60\cdot 70=4200$;

д) $a=24$, $b=49$, $a_1=20$, $b_1=50$, $S=20\cdot 50=1000$.

3. Для вычисления объема куба было измерено линейкой его ребро. Оно оказалось равным a см. Известно, что погрешность измерения линейкой равна 0,5 см. Объем куба будет равен V см^3. Найти относительную погрешность полученного результата.

а) $a=10$, $V=1000$; б) $a=5$, $V=125$;

в) $a=8$, $V=512$; г) $a=12$, $V=1728$;

д) $a=3$, $V=27$; е) $a=15$, $V=3375$.

4. Известно, что ребра прямоугольного параллелепипеда равны a см, b см и c см. Для упрощения вычислений эти числа округлили до a_1 см, b_1 см и c_1 см соответственно. Нашли объем V (куб. см). Найти относительную погрешность полученного результата.

а) $a=13$, $b=33, c=69, a_1=10$, $b_1=30, c_1=70, V=10\cdot 30\cdot 70=21000$;

б) $a=24$, $b=41$, $c=56$, $a_1=20$, $b_1=40$, $c_1=60$, $V=20\cdot 40\cdot 60=48000$;

в) $a=31$, $b=52$, $c=18$, $a_1=30$, $b_1=50$, $c_1=20$, $V=30\cdot 50\cdot 20=30000$.

5. Вычислили значение функции $f(x;y)$ при x и y, получили результат равный S. Известны относительные погрешности чисел x и y: δ_x и δ_y. Найти относительную погрешность полученного результата.

а) $f(x;y)=(x\cdot y)^2$, $x=4$, $y=5$, $S=400$, $\delta_x=0{,}02$, $\delta_y=0{,}03$;

б) $f(x;y)=\dfrac{x}{y^2}$, $x=100$, $y=2$, $S=25$, $\delta_x=0{,}01$, $\delta_y=0{,}01$;

в) $f(x;y)=\dfrac{x^2}{y^2}$, $x=40$, $y=5$, $S=64$, $\delta_x=0{,}02$, $\delta_y=0{,}01$;

г) $f(x;y)=x^2\cdot y^3$, $x=10$, $y=2$, $S=800$, $\delta_x=0{,}01$, $\delta_y=0{,}01$.

6. Число X, все цифры которого верны в строгом смысле, округлите до трех значащих цифр. Для получения числа $X_1\approx X$ найдите предельную абсолютную и предельную относительную погрешности.

а) $X=0{,}068147$; б) $X=0{,}12138$;

в) $X=7{,}32147$; г) $X=1{,}0005745$;

д) $X=0{,}007275$; е) $X=45{,}548$;

ж) $X=10{,}7818$; з) $X=2{,}18901$.

7. Определить, какое равенство точнее.

а) $\dfrac{14}{17}=0{,}824$ и $\sqrt{53}=7{,}28$; б) $\dfrac{6}{7}=0{,}857$ и $\sqrt{41}=6{,}40$;

в) $\dfrac{7}{3}=2{,}33$ и $\sqrt{58}=7{,}62$; г) $\dfrac{12}{7}=1{,}71$ и $\sqrt{47}=6{,}86$;

д) $\dfrac{27}{31}=0{,}871$ и $\sqrt{42}=6{,}48$; е) $\dfrac{21}{13}=1{,}62$ и $\sqrt{63}=7{,}94$;

ж) $\dfrac{23}{9}=2{,}56$ и $\sqrt{87}=9{,}33$; з) $\dfrac{16}{7}=2{,}29$ и $\sqrt{11}=3{,}32$.

8. Округлить сомнительные цифры числа, оставив верные знаки. Определить абсолютную погрешность результата.

а) $13{,}5726\pm 0{,}007$; б) $23{,}3748$, $\delta=0{,}27\%$;

в) $4{,}57633\pm 0{,}00042$; г) $0{,}088748$, $\delta=0{,}56\%$;

д) $0{,}38725\pm 0{,}00112$; е) $46{,}7843$, $\delta=0{,}32\%$;

ж) $0,75244 \pm 0,00013$; з) $45,7832$, $\delta = 0,18\%$.

9. Найти предельные абсолютную и относительную погрешности приближенного числа, все цифры которого по умолчанию верные.

а) $0,645$; б) $7,38$;

в) $4,8556$; г) $0,00646$;

д) $71,385$; е) $3,6765$;

ж) $6,8346$; з) $5,374$.

10. Вычислить и определить погрешности результата $X = \dfrac{a \cdot b}{\sqrt[3]{c}}$.

а) $a = 3,85(\pm 0,01)$, $b = 2,0435(\pm 0,0004)$, $c = 962,6(\pm 0,1)$;

б) $a = 4,16(\pm 0,005)$, $b = 12,163(\pm 0,002)$, $c = 55,18(\pm 0,01)$.

11. Вычислить и определить погрешности результата $X = \dfrac{a^2 \cdot b}{c}$.

а) $a = 3,456(\pm 0,002)$, $b = 0,642(\pm 0,0005)$, $c = 7,12(\pm 0,004)$;

б) $a = 1,245(\pm 0,001)$, $b = 0,121(\pm 0,0002)$, $c = 2,34(\pm 0,003)$.

12. Вычислить и определить погрешности результата $X = \dfrac{a \cdot b}{c^2}$.

а) $a = 0,3575(\pm 0,0002)$, $b = 2,63(\pm 0,01)$, $c = 0,854(\pm 0,0005)$;

б) $a = 0,1756(\pm 0,0001)$, $b = 3,71(\pm 0,03)$, $c = 0,285(\pm 0,0002)$.

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ

Конечные разности. Интерполирование. Интерполяционные формулы Лагранжа и Ньютона.

1. Для некоторой функции $y = f(x)$ известна таблица ее значений. Составить таблицу конечных разностей возможных порядков.

а)

i	x_i	y_i
0	1,1	3,2
1	1,1	4,3
2	1,2	5,6

б)

i	x_i	y_i
0	0	4,1
1	0,1	2,6
2	0,2	1,1

в)

i	x_i	y_i
0	2	5,2
1	3	7,6
2	4	9,3

г)

i	x_i	y_i
0	1,0	4,0
1	1,1	3,8
2	1,2	3,4

д)

i	x_i	y_i
0	2	3,2
1	3	3,6
2	4	4,4

е)

i	x_i	y_i
0	2,0	3,8
1	2,1	2,5
2	2,2	1,1

2. Для функций, заданных табличнопостроить интерполяционный полином Лагранжа.

а)

x	1	2	3
y	12	4	6

б)

x	-1	0	1
y	4	0	1

в)

x	1	2	3
y	2	7	1

г)

x	2	3	4
y	12	3	4

д)

x	2	3	4	5
y	7	5	8	7

е)

x	0	1	2	3
y	-2	-5	0	-4

ж)

x	-1	0	1	2
y	4	2	0	1

з)

x	2	3	4	5
y	7	5	8	7

3. Для функций, заданных таблично построить интерполяционный полином Ньютона.

а)

x	0	1	2
y	3	7	13

б)

x	0	1	2
y	9	7	1

в)

x	0	1	2
y	4	6	10

г)

x	0	1	2
y	4	2	8

д)

x	0	1	2
y	3	5	1

е)

x	0	1	2
y	8	10	2

ж)

x	-1	0	1	2
y	2	2	2	5

з)

x	0	2	4	6
y	1	3	2	5

ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Приближенные методы вычисления производной от функции, заданной таблично. Приближенные методы интегрирования. Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Некоторая функция $y=f(x)$ задана в виде таблицы. Если требуется найти значение производной данной функции в некоторой точке, то можно заменить данную функцию, аналитическая запись которой неизвестна, некоторой другой функцией $y=\varphi(x)$, для которой $\varphi(x)\approx f(x)$, и найти производную функции $y=\varphi(x)$. Если шаг таблицы h (разность между соседними значениями x) постоянен, то можно воспользоваться формулой

$$\varphi(x)=y_0+\frac{\Delta y_0}{1}t+\frac{\Delta^2 y_0}{1\cdot 2}t(t-1)+\frac{\Delta^3 y_0}{1\cdot 2\cdot 3}t(t-1)(t-2)+\ldots,$$

где $t=\dfrac{x-x_0}{h}$ и $\Delta^i y_0=\Delta^{i-1}y_1-\Delta^{i-1}y_0$. Вычисления производите с двумя знаками после запятой. Для заданной в виде таблицы функции $y=f(x)$ найти значение $f'(a)$.

а)

x_i	0	1	2
y_i	3,2	3,6	3,8

$f'(0{,}1)$

б)

x_i	0	1	2
y_i	7,1	9,6	12,3

$f'(0{,}1)$

в)

x_i	0	1	2
y_i	5,1	4,6	3,6

$f'(0{,}2)$

г)

x_i	0	1	2
y_i	3,4	2,6	1,2

$f'(0{,}1)$

д)

x_i	0	1	2
y_i	1,1	1,6	2,3

$f'(0{,}2)$

е)

x_i	0	1	2
y_i	7,2	7,9	8,9

$f'(0{,}1)$

2. Для приближенного вычисления определенного интеграла от функции $y=f(x)$ на интервале $[a;b]$ можно воспользоваться формулой трапеций $\int\limits_a^b y\,dx\approx\frac{b-a}{n}\cdot\left(\frac{y_0-y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right)$. Интервал $[a;b]$ разбили на 4 равные

части и вычислили соответствующие приближенные значения функции $y = f(x)$. Получили таблицу значений, тогда $\int_a^b y\,dx$ равен:

а) $y = \dfrac{1}{1+x^3}$, $[0;1]$,

x	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00
y	1,00	0,98	0,89	0,70	0,50

б) $y = \dfrac{x}{1+x^3}$, $[0;1]$,

x	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00
y	0,00	0,25	0,44	0,53	0,50

в) $y = e^{-x^2}$, $[0;1]$,

x	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00
y	1,00	0,94	0,78	0,57	0,37

г) $y = e^{-x^3}$, $[0;1]$,

x	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00
y	1,00	0,98	0,88	0,66	0,37

д) $y = \dfrac{x}{\cos x}$, $[0;1]$,

x	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00
y	0,00	0,26	0,57	1,03	1,85

е) $y = \dfrac{\sin x}{x}$, $[1;2]$,

x	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00
y	0,84	0,76	0,66	0,56	0,45

3. Для приближенного решения дифференциального уравнения $y' = f(x;y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$ можно воспользоваться методом Эйлера: $y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k;y_k)$. Тогда для уравнения $y' = f(x;y)$ при начальном условии $y(x_0) = y_0$ с шагом $h = 0{,}1$, значение $y(0,2)$ с точностью до десятых будет равно:

а) $y' = 2x + y$, $y(0) = 1$; б) $y' = x^2 + y$, $y(0) = 1$;

в) $y' = 2x - y$, $y(0) = 1$; г) $y' = x - y^2$, $y(0) = -1$;

д) $y' = x \cdot y^2$, $y(0) = 2$; е) $y' = 4x \cdot y^2$, $y(0) = -1$.

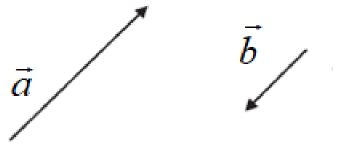
РАЗДЕЛ 9. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

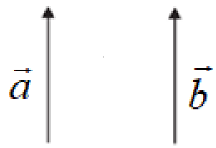
Основные понятия о векторах. Линейные операции над векторами, их свойства. Скалярное произведение векторов. Векторное и смешанное произедение векторов.

1. Укажите, какими являются следующие пары векторов.

а)



б)



в)

г)

2. Даны векторы $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Построить вектора.

а) $\vec{a}-\vec{b}$; б) $2\vec{b}$;

в) $\vec{c}+\vec{a}+\vec{b}$; г) $3\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}+2\vec{b}$.

3. Зная координаты точек A и B найти координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$.

а) $A(-5;4;2)$ и $B(-2;6;8)$; б) $A(1;1;5)$ и $B(3;7;6)$;

в) $A(-2;4;6)$ и $B(8;-3;-1)$; г) $A(8;2;-5)$ и $B(5;1;-2)$;

д) $A(1;5;-6)$ и $B(-1;2;1)$; е) $A(5;-3;8)$ и $B(-8;8;1)$.

4. По данным точкам найти координаты векторов $2\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{BA}$, $3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}$.

а) $A(-2;2;7)$, $B(2;1;2)$, $C(-2;-1;6)$; б) $A(3;4;1)$, $B(3;-1;2)$, $C(-1;-3;6)$;

в) $A(7;-1;6)$, $B(-1;4;-3)$, $C(3;-1;4)$; г) $A(-2;4;1)$, $B(2;0;-2)$, $C(-1;-2;6)$;

д) $A(1;4;1)$, $B(1;1;1)$, $C(-1;-1;6)$; е) $A(-1;1;7)$, $B(1;2;1)$, $C(-1;-6;-3)$.

5. По данным точкам найти координаты векторов $2\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{BC}$, $5\overrightarrow{CB}+3\overrightarrow{AC}$.

а) $A(3;-1;6)$, $B(-1;0;1)$, $C(-3;4;-2)$; б) $A(0;5;2)$, $B(2;2;2)$, $C(0;0;1)$;

в) $A(2;-4;-1)$, $B(-2;-1;2)$, $C(1;0;2)$; г) $A(-3;4;5)$, $B(4;6;2)$, $C(8;4;9)$;

д) $A(6;7;4)$, $B(5;4;5)$, $C(2;0;3)$; е) $A(-3;-1;5)$, $B(1;-2;5)$, $C(-3;-4;4)$.

6. Найти координаты векторов $\vec{p}=2\vec{a}-3\vec{b}+4\vec{c}$, $\vec{p}=2\vec{c}-5\vec{b}+\vec{a}$.

а) $\vec{a}=(3;2;6)$, $\vec{b}=(-5;1;-1)$, $\vec{c}=(0;4;1)$;

б) $\vec{a}=(2;-2;0)$, $\vec{b}=(-3;-1;2)$, $\vec{c}=(3;4;-2)$;

в) $\vec{a}=(4;2;-7)$, $\vec{b}=(7;-1;-3)$, $\vec{c}=(0;-5;10)$;

г) $\vec{a}=(-4;-2;1)$, $\vec{b}=(-2;6;-4)$, $\vec{c}=(5;-4;-8)$;

д) $\vec{a}=(6;-1;3)$, $\vec{b}=(5;2;-5)$, $\vec{c}=(5;5;0)$;

е) $\vec{a}=(-2;2;-9)$, $\vec{b}=(-4;1;-4)$, $\vec{c}=(8;4;-1)$.

7. Даны векторы $\vec{a}=(1;-4;2), \vec{b}=(-1;0;-5)$. Найти:

а) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; б) $\vec{b}^{\,2}$;

в) $2\vec{a}-\vec{b}$; г) $5\vec{a}+\vec{b}$;

д) $-2\vec{a}$; е) $(3\vec{a}+2\vec{b})\cdot 2$.

8. Зная координаты точек A и B найти длину вектора $\overrightarrow{AB}$.

а) $A(-1;0;2)$ и $B(1;-2;3)$; б) $A(8;2;3)$ и $B(9;7;-5)$;

в) $A(-35;-17;20)$ и $B(-34;-5;8)$; г) $A(2;5;-3)$ и $B(6;8;-3)$;

д) $A(-3;2;1)$ и $B(0;-2;1)$; е) $A(-6;1;-1)$ и $B(2;2;-6)$.

9. Вычислить модули векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

а) $\vec{a}=(3;-1;2)$ и $\vec{b}=(6;-2;-3)$; б) $\vec{a}=(0;4;-3)$ и $\vec{b}=(2;-8;3)$;

в) $\vec{a}=(4;2;4)$ и $\vec{b}=(4;-3;5)$; г) $\vec{a}=(1;-2;-7)$ и $\vec{b}=(-2;-4;1)$;

д) $\vec{a}=(5;-1;2)$ и $\vec{b}=(3;-1;-4)$; е) $\vec{a}=(2;-4;0)$ и $\vec{b}=(-5;3;2)$.

10. Найдите значение α, при котором длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будут равны, если известны координаты этих векторов.

а) $\vec{a}=(12;3;\alpha)$ и $\vec{b}=(4;1;-3)$; б) $\vec{a}=(2;5;1)$ и $\vec{b}=(4;\alpha;2)$;

в) $\vec{a}=(1;\alpha;1)$ и $\vec{b}=(-1;1;-1)$; г) $\vec{a}=(10;\alpha;1)$ и $\vec{b}=(-1;-2;-10)$.

11. Проверить коллинеарность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

а) $\vec{a}=(2;-1;3)$ и $\vec{b}=(-6;3;-9)$; б) $\vec{a}=(3;-2;1)$ и $\vec{b}=(9;6;3)$;

в) $\vec{a}=(3;-2;1)$ и $\vec{b}=(6;-4;2)$; г) $\vec{a}=(-13;-13;35)$ и $\vec{b}=(39;39;-105)$;

д) $\vec{a}=(2;3;-1)$ и $\vec{b}=(1;-1;3)$; е) $\vec{a}=(3;4;1)$ и $\vec{b}=(2;1;2)$.

12. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы координатами. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

а) $\vec{a}=(-2;10;10)$ и $\vec{b}=(8;3;2)$; б) $\vec{a}=(7;-4;9)$ и $\vec{b}=(11;1;2)$;

в) $\vec{a}=(-7;-2;6)$ и $\vec{b}=(10;-8;3)$; г) $\vec{a}=(7;-1;7)$ и $\vec{b}=(9;5;-8)$;

д) $\vec{a}=(-6;7;11)$ и $\vec{b}=(-1;2;-2)$; е) $\vec{a}=(-5;7;11)$ и $\vec{b}=(-9;2;-10)$.

13. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы координатами. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

а) $\vec{a}=(0;-4;-4)$ и $\vec{b}=(-1;-3;-8)$; б) $\vec{a}=(-10;-6;1)$ и $\vec{b}=(-5;7;-6)$;

в) $\vec{a}=(2;-10;-1)$ и $\vec{b}=(10;-6;1)$; г) $\vec{a}=(5;10;3)$ и $\vec{b}=(6;-5;-2)$;

д) $\vec{a}=(5;11;-5)$ и $\vec{b}=(-4;1;-9)$; е) $\vec{a}=(-1;-2;-4)$ и $\vec{b}=(-6;8;5)$.

14. Найти скалярное произведение векторов $(2\vec{a}-3\vec{b})$ и $(\vec{a}+2\vec{b})$; $(3\vec{a}+2\vec{b})$ и $(4\vec{a}-\vec{b})$.

а) $\vec{a}=(7;-1;2)$ и $\vec{b}=(5;3;6)$; б) $\vec{a}=(1;1;5)$ и $\vec{b}=(7;-6;-1)$;

в) $\vec{a}=(-3;7;-5)$ и $\vec{b}=(7;-5;7)$; г) $\vec{a}=(6;8;-6)$ и $\vec{b}=(6;-2;2)$;

д) $\vec{a}=(5;4;-2)$ и $\vec{b}=(3;7;7)$; е) $\vec{a}=(-4;3;-6)$ и $\vec{b}=(4;-5;4)$.

15. Вычислите скалярное произведение векторов, если их длины $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$, а угол между ними равен $\alpha = 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 135^\circ$.

а) $|\vec{a}|=4{,}5$ и $|\vec{b}|=6$; б) $|\vec{a}|=3$ и $|\vec{b}|=14$;

в) $|\vec{a}|=3$ и $|\vec{b}|=4$; г) $|\vec{a}|=6$ и $|\vec{b}|=8$;

д) $|\vec{a}|=2$ и $|\vec{b}|=3$; е) $|\vec{a}|=6$ и $|\vec{b}|=2$.

16. Найти длину вектора.

а) $\vec{a} = 3\vec{b} + \vec{c}$, если $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = 1$ и $(\vec{b}\,\hat{}\,\vec{c}) = \frac{2\pi}{3}$;

б) $\vec{a} = 2\vec{b} - \vec{c}$, если $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = 1$ и $(\vec{b}\,\hat{}\,\vec{c}) = \frac{\pi}{3}$;

в) $\vec{a} = 2\vec{b} + \vec{c}$, если $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = 2$ и $(\vec{b}\,\hat{}\,\vec{c}) = \frac{2\pi}{3}$;

г) $\vec{a} = \vec{b} + 2\vec{c}$, если $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 1$ и $(\vec{b}\,\hat{}\,\vec{c}) = \frac{\pi}{3}$;

д) $\vec{a} = 3\vec{b} + 2\vec{c}$, если $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 1$ и $(\vec{b}\,\hat{}\,\vec{c}) = \frac{2\pi}{3}$;

е) $\vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$, если $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 2$ и $(\vec{b}\,\hat{}\,\vec{c}) = \frac{\pi}{3}$.

17. Найти смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$.

а) $\vec{a}(2;1;3), \vec{b}(5;3;2), \vec{c}(1;4;3)$;

б) $\vec{a}(3;2;1), \vec{b}(2;5;3), \vec{c}(3;4;2)$;

в) $\vec{a}(1;1;1), \vec{b}(1;2;3), \vec{c}(1;3;6)$;

г) $\vec{a}(0;1;1), \vec{b}(1;0;1), \vec{c}(1;1;0)$;

д) $\vec{a}(2;0;3), \vec{b}(7;1;6), \vec{c}(6;0;5)$;

е) $\vec{a}(1;2;3), \vec{b}(4;5;6), \vec{c}(7;8;9)$.

18. Вычислите векторное произведение векторов, если их длины $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$, а угол между ними равен $\alpha = 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 135^\circ$.

а) $|\vec{a}| = 10, |\vec{b}| = 2$;

б) $|\vec{a}| = 15, |\vec{b}| = 20$;

в) $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 3$;

г) $|\vec{a}| = 8, |\vec{b}| = 6$;

д) $|\vec{a}| = 6, |\vec{b}| = 3$;

е) $|\vec{a}| = 7, |\vec{b}| = 4$.

ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

Общее уравнение прямой на плоскости. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Уравнение прямой в отрезках. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Нормальное уравнение прямой. Уравнение с данным направляющим вектором и точкой, принадлежащей прямой.

Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых, угол между ними. Точка пересечения двух прямых. Расстояние от точки до прямой.

1. Указать особенности в расположении прямых на плоскости (прямая общего положения, проходящая или не проходящая через начало координат; прямая, параллельная оси Ox или Oy). Сделать чертеж каждой прямой в системе координат xOy.

а) $2x=3$; б) $x=-1$;
в) $3x=2y$; г) $2x=5y$;
д) $y-1=0$; е) $y+4=0$.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через точки M_1 и M_2.

а) $M_1(1;2)$, $M_2(3;-1)$; б) $M_1(-1;3)$, $M_2(-8;1)$;
в) $M_1(3;6)$, $M_2(7;5)$; г) $M_1(6;3)$, $M_2(-2;6)$;
д) $M_1(3;7)$, $M_2(7;9)$; е) $M_1(-6;6)$, $M_2(-3;9)$;
ж) $M_1(9;5)$, $M_2(5;7)$; з) $M_1(2;-7)$, $M_2(1;-9)$;
и) $M_1(6;3)$, $M_2(1;1)$; к) $M_1(2;1)$, $M_2(-6;-2)$.

3. Дано общее уравнение прямой. Требуется написатьразличные типы уравнений этой прямой (уравнение в отрезках, уравнение с угловым коэффициентом, нормальное уравнение).

а) $12x-5y-65=0$; б) $3x-4y+24=0$;
в) $3x+4y+6=0$; г) $4x-3y+12=0$;
д) $5x-3y+6=0$; е) $x-y+1=0$;
ж) $2x+y+3=0$; з) $3x+11y-8=0$.

4. Составить уравнение прямой, проходящей через точку M и образующей с осью абсцисс угол α.

а) $M(2;4)$ и $\alpha=30^\circ$; б) $M(4;-1)$ и $\alpha=45^\circ$;
в) $M(0;-1)$ и $\alpha=75^\circ$; г) $M(1;3)$ и $\alpha=135^\circ$;
д) $M(1;0)$ и $\alpha=60^\circ$; е) $M(1;1)$ и $\alpha=90^\circ$;

ж) $M(1;2)$ и $\alpha = 120^\circ$; з) $M(3;1)$ и $\alpha = 150^\circ$.

5. Выбрать из имеющегося списка прямых на плоскости пары: пересекающихся прямых, совпадающих прямых и прямых, не имеющих общих точек.

а) $2x + y + 3 = 0$, $4x = 2y$, $y = -2x$, $7y + 14x + 5 = 0$, $7x + 14y + 21 = 0$;

б) $x - y + 7 = 0$, $2x = 4y$, $x + y = 7$, $3x - 2y + 15 = 0$, $2x + 2y = 14$;

в) $x = y$, $2x + 4y = 8$, $2x + 2y = 16$, $3x - 3y = 11$, $x - 3y - 9 = 0$;

г) $2x - 6y = 12$, $x + y = 12$, $3x - 4y = 4$, $3x + 3y = 6$, $12x = 36y + 72$;

д) $x - y + 5 = 0$, $2x - 2y - 7 = 0$, $x = 3y$, $3x - 3y + 15 = 0$, $6x - 2y + 3 = 0$.

6. Составить уравнения прямых, проходящих:

–через точку M параллельно прямой l;

– через точку M перпендикулярно прямой l.

а) $M(4;6)$ и $l: 6x + 9y = 0$; б) $M(2;7)$ и $l: 4x - 6y = 0$;

в) $M(6;0)$ и $l: 8x + 3y + 1 = 0$; г) $M(8;3)$ и $l: 3x - 2y - 4 = 0$;

д) $M(-4;1)$ и $l: 7x - 6y + 2 = 0$; е) $M(3;-4)$ и $l: 2x + 5y - 7 = 0$;

ж) $M(-3;2)$ и $l: 7x - 4y - 11 = 0$; з) $M(3;-2)$ и $l: 3x - 4y + 5 = 0$.

7. Найти расстояние от точки M до прямой l.

а) $M(4;2)$ и $l: 3x - 7y + 4 = 0$; б) $M(0;2)$ и $l: 2x - y + 7 = 0$;

в) $M(5;0)$ и $l: 3x - 15y - 1 = 0$; г) $M(-5;1)$ и $l: -3x + 2y + 4 = 0$;

д) $M(5;-2)$ и $l: -3x - 4y + 1 = 0$; е) $M(-5;-3)$ и $l: 3x + 6y - 1 = 0$;

ж) $M(5;4)$ и $l: 5x + 4y - 30 = 0$; з) $M(5;-5)$ и $l: 3x - 4y + 5 = 0$.

8. Найти угол между прямыми l и l'.

а) $l': x - 3y + 10 = 0$ и $l: 6x + 9y = 0$;

б) $l': 5x + 3y + 13 = 0$ и $l: 4x - 6y = 0$;

в) $l': 7x - 6y + 34 = 0$ и $l: 8x + 3y + 1 = 0$;

г) $l': -x + 3y + 7 = 0$ и $l: 3x - 2y - 4 = 0$;

д) $l': 2x + 5y - 7 = 0$ и $l: 7x - 6y + 2 = 0$;

е) $l': 3x - 15y - 1 = 0$ и $l: 2x + 5y - 7 = 0$;

ж) $l': -3x + 2y + 4 = 0$ и $l: 7x - 4y - 11 = 0$;

з) $l': 5x + 4y - 30 = 0$ и $l: 3x - 4y + 5 = 0$.

9. Найти точку пересечения прямых.

а) $x+2y+1=0$ и $2x+y+2=0$; б) $x-2y+2=0$ и $5x+2y+4=0$;
в) $4x+5y+6=0$ и $x+2y+3=0$; г) $5x+9y=-16$ и $-2x+y=-3$;
д) $2x+3y-8=0$ и $4x-y-2=0$; е) $4x+2y=8$ и $2x+y=4$.

10. Даны координаты вершин треугольника ABC. Требуется найти:
–периметр треугольника ABC;
–уравнения сторон;
– уравнение медианы AM;
–уравнение высоты AH;
–уравнение прямой, проходящей через точку A, параллельно прямой BC.

а) $A(6;3)$, $B(-6;-2)$, $C(-10;1)$; б) $A(-1;7)$, $B(11;2)$, $C(17;10)$;
в) $A(7;2)$, $B(-5;-3)$, $C(-9;0)$; г) $A(0;7)$, $B(12;2)$, $C(18;10)$;
д) $A(5;3)$, $B(-7;-2)$, $C(-11;1)$; е) $A(-2;7)$, $B(10;2)$, $C(16;10)$;
ж) $A(5;7)$, $B(-7;2)$, $C(-11;5)$ з) $A(-3;8)$, $B(9;3)$, $C(15;1)$;
и) $A(9;1)$, $B(-3;-4)$, $C(-7;-1)$; к) $A(-2;9)$, $B(10;-4)$, $C(16;12)$.

КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Общее уравнение кривой 2-го порядка. Окружность и эллипс. Гипербола. Парабола.

1. Написать уравнение окружности с центром в точке C и радиусом, равным R.

а) $C(2;-3)$, $R=6$; б) $C(-2;0)$, $R=2$;

в) $C(6;-8)$, $R=7$; г) $C(1;-2)$, $R=4$;

д) $C(3;5)$, $R=\sqrt{9}$; е) $C(5;-7)$, $R=\sqrt{5}$.

2. Написать каноническое уравнение окружности, имеющей диаметр AB.

а) $A(2;3)$, $B(6;1)$; б) $A(1;4)$, $B(-3;2)$;

в) $A(-4;5)$, $B(2;2)$; г) $A(-7;3)$, $B(4;2)$;

д) $A(1;1)$, $B(3;-5)$; е) $A(4;6)$, $B(-4;7)$.

3. Составить уравнение окружности с центром в точке A и проходящей через точку B.

а) $A(-5;3)$, $B(2;-1)$; б) $A(0;6)$, $B(-3;2)$;

в) $A(-4;3)$, $B(-1;-1)$; г) $A(2;1)$, $B(5;5)$;

д) $A(1;-4)$, $B(0;3)$; е) $A(3;2)$, $B(7;5)$.

4. Написать уравнение окружности, проходящей через три точки: A, B, C.

а) $A(0;1)$, $B(2;0)$, $C(3;-1)$; б) $A(-1;3)$, $B(0;2)$, $C(1;-1)$;

в) $A(3;1)$, $B(-2;6)$, $C(-5;-3)$; г) $A(1;2)$, $B(0;-1)$, $C(-3;0)$;

д) $A(1;-4)$, $B(4;5)$, $C(3;-2)$; е) $A(3;-7)$, $B(8;-2)$, $C(6;2)$.

5. Найти координаты центра и радиус окружности.

а) $x^2+y^2-6x+10y-2=0$; б) $x^2+y^2+6x-12y-4=0$;

в) $x^2+y^2-8x+12y+3=0$; г) $x^2+y^2-8x+18y+48=0$;

д) $x^2+y^2-6x+8y-24=0$; е) $x^2+y^2+12x-2y-12=0$.

6. Составить каноническое уравнение эллипса, если его полуоси соответственно равны a и b.

а) $a=5$ и $b=4$; б) $a=6$ и $b=4$;

в) $a=4$ и $b=3$; г) $a=4$ и $b=2$;

д) $a=5$ и $b=3$; е) $a=2$ и $b=\sqrt{2}$.

7. Найти каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки A и B.

а) $A(-4;0)$, $B\left(2;-\sqrt{3}\right)$; б) $A\left(-\sqrt{15};2\right)$, $B(0;4)$;

в) $A\left(2;\sqrt{3}\right)$, $B(0;2)$; г) $A\left(0;\sqrt{3}\right)$, $B\left(\sqrt{\frac{14}{3}};1\right)$;

д) $A(3;0)$, $B\left(2;\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$; е) $A\left(\frac{5}{2};\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$, $B\left(-2;\frac{\sqrt{15}}{5}\right)$.

8. Составить каноническое уравнение эллипса, если расстояние между фокусами равно $2c$ и большая ось равна $2a$.

а) $2c=8$ и $2a=10$; б) $2c=10$ и $2a=16$;

в) $2c=10$ и $2a=12$; г) $2c=30$ и $2a=34$.

9. Составить каноническое уравнение эллипса, если расстояние между фокусами равно $2c$ и малая полуось равна b.

а) $2c=2$ и $b=2$; б) $2c=4$ и $b=3$;

в) $2c=6$ и $b=4$; г) $2c=4$ и $b=1$.

10. Составить каноническое уравнение эллипса, если его большая ось равна $2a$ и эксцентриситет ε.

а) $2a=26$ и $\varepsilon=\frac{12}{13}$; б) $2a=20$ и $\varepsilon=\frac{3}{5}$;

в) $2a=24$ и $\varepsilon=\frac{1}{2}$; г) $2a=24$ и $\varepsilon=\frac{\sqrt{20}}{6}$;

д) $2a=20$ и $\varepsilon=\frac{4}{5}$; е) $2a=22$ и $\varepsilon=\frac{\sqrt{57}}{11}$.

11. Составить каноническое уравнение эллипса, если его малая полуось равна b и эксцентриситет ε.

а) $b=8$ и $\varepsilon=\frac{3}{5}$; б) $b=5$ и $\varepsilon=\frac{12}{13}$;

в) $b=3$ и $\varepsilon=\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $b=2$ и $\varepsilon=\frac{5}{\sqrt{29}}$;

д) $b=4\sqrt{2}$ и $\varepsilon=\frac{\sqrt{3}}{3}$; е) $b=\sqrt{15}$ и $\varepsilon=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

12. Составить каноническое уравнение эллипса, если расстояние между фокусами равно $2c$ и эксцентриситет ε.

а) $2c=2$ и $\varepsilon=0{,}5$; б) $2c=6$ и $\varepsilon=0{,}6$;

в) $2c=6$ и $\varepsilon=0{,}5$; г) $2c=14$ и $\varepsilon=0{,}7$;

д) $2c=6$ и $\varepsilon=\frac{3}{4}$; е) $2c=2$ и $\varepsilon=\frac{1}{3}$.

13. Найти полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет и уравнения директрис эллипса.

а) $9x^2+4y^2=36$; б) $16x^2+25y^2=400$;

в) $4x^2+9y^2=144$; г) $9x^2+25y^2=255$;

д) $3x^2+4y^2=12$; е) $x^2+25y^2=25$.

14. Составить каноническое уравнение гиперболы, если действительная полуось a и мнимаяполуось b.

а) $a=5$ и $b=3$; б) $a=12$ и $b=5$;

в) $a=\sqrt{3}$ и $b=2$; г) $a=\sqrt{5}$ и $b=3$;

д) $a=7$ и $b=4\sqrt{2}$; е) $a=6$ и $b=2\sqrt{7}$.

15. Найти каноническое уравнение гиперболы, проходящей через точки A и B.

а) $A(6;-1)$, $B\left(-8;-2\sqrt{2}\right)$; б) $A(4;-6)$, $B\left(6;4\sqrt{6}\right)$;

в) $A\left(4\sqrt{5};3\right)$, $B\left(4\sqrt{6};3\sqrt{2}\right)$; г) $A\left(3;\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$, $B\left(-2\sqrt{5};3\right)$.

16. Составить каноническое уравнение гиперболы, если расстояние между фокусами равно $2c$ и действительная полуось a.

а) $2c=6$ и $a=\sqrt{7}$; б) $2c=12$ и $a=3$;

в) $2c=16$ и $a=7$; г) $2c=6$ и $a=2$;

д) $2c=10$ и $a=4$; е) $2c=10$ и $a=3$.

17. Составить каноническое уравнение гиперболы, если расстояние между фокусами равно $2c$ и мнимая полуось b.

а) $2c=12$ и $b=3$; б) $2c=2\sqrt{2}$ и $b=1$;

в) $2c=10$ и $b=3$; г) $2c=6$ и $b=2$;

д) $2c=10$ и $b=4$; е) $2c=4$ и $b=3$.

18. Составить каноническое уравнение гиперболы, если её действительная полуось равна a и эксцентриситет ε.

а) $a=2$ и $\varepsilon=6$; б) $a=4$ и $\varepsilon=8$;

в) $a=4$ и $\varepsilon=1,25$;

г) $a=4$ и $\varepsilon=2$;

д) $a=3$ и $\varepsilon=\frac{5}{3}$;

е) $a=3$ и $\varepsilon=\frac{10}{3}$.

19. Составить каноническое уравнение гиперболы, если её мнимая полуось равна b и эксцентриситет ε.

а) $b=2\sqrt{6}$ и $\varepsilon=1,4$;

б) $b=4$ и $\varepsilon=\frac{3\sqrt{5}}{5}$;

в) $b=3\sqrt{13}$ и $\varepsilon=\frac{\sqrt{17}}{2}$;

г) $b=3$ и $\varepsilon=\frac{\sqrt{13}}{2}$.

20. Составить каноническое уравнение гиперболы, если расстояние между фокусами равно $2c$ и эксцентриситет ε.

а) $2c=6$ и $\varepsilon=1,25$;

б) $2c=8$ и $\varepsilon=1,2$;

в) $2c=10$ и $\varepsilon=1,25$;

г) $2c=8$ и $\varepsilon=8$;

д) $2c=14$ и $\varepsilon=\frac{14}{3}$;

е) $2c=10$ и $\varepsilon=\frac{5}{3}$.

21. Найти полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет и уравнения директрис гиперболы.

а) $16x^2-9y^2=144$;

б) $9x^2-4y^2=36$;

в) $5x^2-4y^2=20$;

г) $4x^2-y^2=4$;

д) $x^2-4y^2=16$;

е) $4x^2-3y^2=12$.

22. Написать каноническое уравнение параболы, проходящей через точку A симметрично оси абсцисс.

а) $A(8;-3)$;

б) $A(-1;5)$;

в) $A(4;5)$;

г) $A(-6;4)$;

д) $A(7;1)$;

е) $A(9;3)$.

23. Написать каноническое уравнение параболы, проходящей через точку A симметрично оси ординат.

а) $A(6;3)$;

б) $A(2;1)$;

в) $A(7;2)$;

г) $A(-1;5)$;

д) $A(-7;3)$;

е) $A(4;2)$.

24. Составить каноническое уравнение параболы, если расстояние от фокуса до директрисы равно p.

а) $p = 2$; б) $p = 10$;

в) $p = 3$; г) $p = 12$;

д) $p = 0,25$; е) $p = 0,5$.

25. Составить каноническое уравнение параболы с фокусом в точке F.

а) $F(2;0)$; б) $F(0;-6)$;

в) $F(0;3)$; г) $F(4;0)$;

д) $F(-3;0)$; е) $F(0;-3)$.

26. Определить координаты фокуса параболы и напишите уравнение ее директрисы.

а) $y^2 = 4x$; б) $y^2 = -6x$;

в) $y^2 = 16x$; г) $y^2 = -9x$;

д) $y^2 = 12x$; е) $y^2 = -4x$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

КРАТКИЙ СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Формулы сокращенного умножения

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1, x_2 – корни квадратного уравнения

Квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

$$D = b^2 - 4ac,\quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Определитель второго порядка

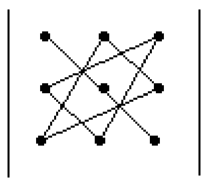
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Определитель третьего порядка

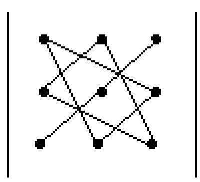
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

Это правило легко запомнить, пользуясь схемой, которая называется правилом треугольников:

1) «+»



2) «–»



Обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^{П} = \frac{A^{П}}{|A|},$$

где $|A|$ - определитель данной матрицы;

$A^{П}$ - присоединенная матрица к матрице A.

Проверка: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.

Правило Крамера

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}.$$

1) Вычислим основной определитель матрицы Δ:

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, убеждаемся, что он отличен от нуля.

2) Вычислим основной определитель матрицы Δ_1:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

3) Вычислим основной определитель матрицы Δ_2:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}.$$

4) Вычислим основной определитель матрицы Δ_3:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

5) Найдем корни системы уравнений x_1, x_2, x_3:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Комплексные числа

1. $z = a + bi$ – алгебраическая форма записи комплексного числа, где $a = \operatorname{Re} z$ действительная часть, $b = \operatorname{Im} z$ – мнимая часть.

2. $z = a + bi$ и $\overline{z} = a - bi$ –сопряженные комплексные числа.

3. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

4. $z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$ – тригонометрическая форма записи комплексного числа, где

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}\ ,$$

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}, z \in I \text{ или } IV \text{ четвертям,} \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}, z \in II \text{ четверти,} \\ -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}, z \in III \text{ четверти.} \end{cases}$$

Арифметические действия над комплексными числами в разных формах записи

Пусть $z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i$.

1. $z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + \left(a_2 + b_2 i\right) = \left(a_1 + a_2\right) + \left(b_1 + b_2\right)i$.
2. $z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 i) - \left(a_2 + b_2 i\right) = \left(a_1 - a_2\right) + \left(b_1 - b_2\right)i$.
3. $$\begin{aligned} &z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i)\cdot\left(a_2 + b_2 i\right) = a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2 i + a_2 \cdot b_1 i + b_1 \cdot b_2 i^2 = \\ &= a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2 i + a_2 \cdot b_1 i - b_1 \cdot b_2 = \left(a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2\right) + \left(a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1\right)i. \end{aligned}$$
4. $z_1 z_2 = r_1 r_2\left[\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)\right]$.
5. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a_1 a_2 - b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \dfrac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$.
6. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\left[\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right]$.

Показательная форма записи комплексного числа. Формула Эйлера

$$z = re^{i\varphi}.$$

Возведение комплексного числа в натуральную степень (формула Муавра)

$$z^n = \left(r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)\right)^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right).$$

Извлечение корня *n*-ой степени из комплексного числа

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), k = \overline{0; n-1}.$$

Правила вычисления пределов

1. $\lim\limits_{x\to a} C = C, C - const$;

2. $\lim\limits_{x\to a} cf(x) = c\lim\limits_{x\to a} f(x)$, где $c - const$;

3. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+g(x)-h(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) - \lim\limits_{x\to a} h(x)$;

4. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} h(x)$;

5. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, где $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$.

Замечательные пределы

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ – первый замечательный предел;

Следствия:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x} = 1$;

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(ax)}{\sin(bx)} = \dfrac{a}{b}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x}{x} = 1$;

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x} = 1$;

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}x}{x} = 1$.

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} = e$ или $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ – второй замечательный предел;

Следствия:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx} = e^{ab}$;

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{x} = 1$.

Непрерывность функции в точке

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Равенство означает выполнение трех условий:

1) функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и в ее окрестности;

2) функция $y = f(x)$ имеет предел при $x \to x_0$;

3) предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке, т.е. выполняется равенство $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Приращение аргумента, приращение функции

$\Delta x = x - x_0$ – приращение аргумента;

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ – приращение функции.

Определение производной

$$y'(x_0) = f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Геометрический смысл производной

$$y'(x) = tg\alpha .$$

1) если $f'(x_0) = tg\alpha > 0$, то касательная направлена вправо вверх, и функция возрастает;

2) если $f'(x_0) = tg\alpha < 0$, то касательная направлена вправо вниз, и функция убывает;

3) если $f'(x_0) = tg\alpha = 0$, то касательная является горизонтальной прямой, и x_0 – критическая точка.

Механический смысл производной

$$v(t) = x'(t) \cdot$$

Таблица производных основных элементарных функций

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$,
2. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$,
3. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$,
4. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$,
5. $(e^x)' = e^x$,
6. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$,
7. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$,
8. $(\sin x)' = \cos x$,
9. $(\cos x)' = -\sin x$,
10. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$,
11. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$,
12. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}^2}$,
13. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
14. $(\mathrm{arctgx})' = \dfrac{1}{1+x^2}$,
15. $(\mathrm{arcctgx})' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Правила дифференцирования

1. $\left(C\cdot f(x)\right)'=C\left(f(x)\right)'$;

2. $\left(f(x)+g(x)-h(x)\right)'=f'(x)+g'(x)-h'(x)$;

3. $\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$;

4. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$, $g(x)\neq 0$.

Производная обратной функции

$$x'_y=\frac{1}{y'_x}.$$

Производная сложной функции

$$\left(u(v(x))\right)'=u'(x)\cdot v'(x).$$

Таблица производных сложных функций

1. $(u^n)'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$,
2. $(\sqrt{u})'=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$,
3. $(a^u)'=a^u\cdot\ln a\cdot u'$,
4. $(e^u)'=e^u\cdot u'$,
5. $(\log_a u)'=\dfrac{1}{u\ln a}\cdot u'$,
6. $(\ln u)'=\dfrac{1}{u}\cdot u'$,
7. $(\sin u)'=\cos u\cdot u'$,
8. $(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$,
9. $(\mathrm{tg}\,u)'=\dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$,
10. $(\mathrm{ctg}\,u)'=-\dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$,
11. $(\arcsin u)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$,
12. $(\arccos u)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$,
13. $(\mathrm{arctg} u)'=\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$,
14. $(\mathrm{arcctg} u)'=-\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$.

Производные высших порядков

1. $y''(x)=f''(x)=(f')'$;
2. $y'''(x)=f'''(x)=(f'')'$;
3. $y^{(n)}(x)=\left(y^{(n-1)}(x)\right)'$.

Дифференциал функции

$$dy = y'(x)dx.$$

Общая схема исследования функции

1) найти область определения функции;

2) найти точки пересечения графика с координатными осями;

3) исследовать функцию на периодичность, четность и нечетность;

4) найти асимптоты функции;

5) найти интервалы монотонности, точки локальных экстремумов и значения функции в этих точках;

6) найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба;

7) используя полученные результаты исследования построить график функции.

Первообразная функции

$F'(x) = f(x).$

Неопределенный интеграл

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Таблица основных неопределенных интегралов

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1.$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C.$

4. $\int e^x dx = e^x + C.$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

6. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C.$

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C.$

9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C.$

10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

11. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\dfrac{x}{a} + C.$

12. $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C.$

Основные свойства неопределенного интеграла

1. $\int kf(x)dx = k\cdot\int f(x)dx$;

2. $\int[f(x)\pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$;

3. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;

4. $\int df(x)dx = f(x) + C$;

5. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то и $\int f(t)dt = F(t) + C$, где $t = \varphi(x)$ – произвольная функция, имеющая непрерывную производную.

Интегрирование заменой переменной

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt.$$

Метод внесения под знак дифференциала

$$f'(x)dx = d(f(x)).$$

При внесении под знак дифференциала необходимо иметь в виду простейшие преобразования дифференциала:

$$dx = d(x+a), a = const$$

$$dx = \frac{1}{a}d(ax), a \neq 0 - const$$

$$xdx = \frac{1}{2}d\left(x^2\right)$$

$$xdx = \frac{1}{2}d\left(x^2 + a\right), a = const$$

$$\cos x dx = d(\sin x)$$

$$\sin x dx = -d(\cos x)$$

$$\frac{dx}{x^2} = -d\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = d(tg\, x)$$

$$\frac{dx}{x} = d(\ln x)$$

Очень часто метод внесения под знак дифференциала используют для нахождения интегралов вида:

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}\int f(kx+b)d(kx+b) = \frac{1}{k}F(kx+b) + C.$$

Поэтому имеют место следующие формулы для неопределенных интегралов:

$$\int (kx+b)^n = \frac{1}{k}\cdot\frac{(kx+b)^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{kx+b}} = \frac{1}{k}\cdot 2\sqrt{kx+b} + C$$

$$\int \frac{dx}{(kx+b)^2} = -\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{kx+b} + C$$

$$\int \frac{dx}{kx+b} = -\frac{1}{k}\ln|kx+b| + C$$

$$\int e^{kx+b}dx = \frac{1}{k}e^{kx+b} + C$$

$$\int a^{kx+b}dx = \frac{1}{k}\cdot\frac{a^{kx+b}}{\ln a} + C$$

$$\int \sin(kx+b)dx = -\frac{1}{k}\cos(kx+b) + C$$

$$\int \cos(kx+b)dx = \frac{1}{k}\sin(kx+b) + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(kx+b)}dx = \frac{1}{k}tg(kx+b) + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(kx+b)}dx = -\frac{1}{k}ctg(kx+b) + C$$

Метод интегрирования по частям

$$\int udv = u\cdot v - \int vdu;$$

$$\int \underbrace{P(x)}_{u}\cdot\underbrace{\begin{Bmatrix} e^{kx} \\ \sin kx \\ \cos kx \end{Bmatrix} dx}_{dv};$$

$$\int \underbrace{\begin{Bmatrix} \ln kx \\ \arcsin kx \\ \arccos kx \\ arctgkx \\ arcctgkx \end{Bmatrix}}_{u}\cdot \underbrace{P(x)dx}_{dv}.$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

1. Интегрирование дроби I типа:

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int\frac{dx}{x-a} = A\int\frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C;$$

2. Интегрирование дроби II типа:

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int\frac{dx}{(x-a)^n} = A\int(x-a)^{-n}d(x-a) = A\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C =$$

$$= -\frac{A}{(n-1)\cdot(x-a)^{n-1}} + C.$$

Интегрирование иррациональных выражений

1. Линейная функция: $\sqrt[n]{ax+b}$ $(a \neq 0)$.

Для решения такого интеграла удобно применить подстановку $t = \sqrt[n]{ax+b}$;

2.Квадратный многочлен: $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

В этом случае необходимо дополнить многочлен до полного квадрата, а затем по одной из формул таблицы интегрирования решить полученный интеграл вида

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}};$$

3. Разность квадратов: $\sqrt{a^2 - x^2}$.

Используем подстановку $x = a\sin t$, затем по формуле $1-\sin^2 t = \cos^2 t$ продолжаем нахождение интеграла.

Интегрирование тригонометрических выражений

1. Вычисление интегралов вида:

$\int R(\sin x; \cos x)dx$ -универсальная тригонометрическая подстановка

$$t = tg\frac{x}{2}.$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}\ ;\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$tgx = \frac{2t}{1-t^2};\ ctgx = \frac{1-t^2}{2t};$$

$$x = 2arctgt;\quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

2. Вычисление интегралов вида:

$$\int \sin^m x \cos^n x dx,$$

где m или n – нечетное число.

Если m – нечетное, то следует использовать подстановку $\cos x = t$.

Если n – нечетное, то следует использовать подстановку $\sin x = t$.

3. Вычисление интегралов вида:

$$\int \sin^m x \cos^n x dx,$$

где m и n – четные числа.

Во втором случае могут помочь тригонометрические формулы:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x);\ \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x);\ \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

4. Вычисление интегралов вида:

$$\int \sin mx \sin nx dx,\ \int \cos mx \cos nx dx,\ \int \sin mx \cos nx dx.$$

Их можно находить с помощью использования тригонометрических формул:

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right];$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right];$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right].$$

Определенный интеграл

$$I=\int_a^b f(x)dx.$$

Свойства определенного интеграла

1. $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(y)dy$;

2. $\int_a^a f(x)dx=0$;

3. $\int_a^b C\cdot dx=C(b-a)$;

4. $\int_a^b Cf(x)dx=C\int_a^b f(x)dx$;

5. $\int_a^b \left[f(x)+g(x)-h(x)\right]dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx-\int_a^b h(x)dx$;

6. $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$;

7. $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$.

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

Геометрическое приложение определенного интеграла

$S=\int_a^b f(x)dx$ – площадь плоской фигуры;

$V_x=\pi\int_a^b y^2(x)dx$ – объем тела вращения вокруг оси Ox;

$V_y = \pi \int_c^d x^2(y)\,dy$ – объем тела вращения вокруг оси Oy;

$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$ – длина дуги кривой.

Физическое приложение определенного интеграла

$S = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$ –вычисление пройденного пути по скорости;

$A = \int_a^b F(s)ds$ –вычисление работы переменной силы.

Дифференциальные уравнения

1. $y' = f(x) \Rightarrow y(x) = \int f(x)dx$;
2. $f(x) \cdot y' = g(x) \Rightarrow y = \int \frac{g(x)}{f(x)}dx$;
3. $g(y)dy = f(x)dx$ или $g(y) \cdot y' = f(x) \Rightarrow \int g(y)dy = \int f(x)dx$;
4. $y' = f(ax + by)$, $a,b \in R$ сделать замену $ax + by = t$;
5. $y' = f(x,y)$ решение данных уравнений ищется с помощью подстановки $y(x) = xz(x)$ откуда $y'(x) = z(x) + xz'(x)$;
6. $y' + f(x)y = g(x)$ интегрирующий множитель определяется формулой $u(x) = e^{\int f(x)dx} \Rightarrow y(x) = \int u(x)g(x)dx + Cu(x)$;
7. $y^{(n)} = f(x) \Rightarrow y(x) = \underbrace{\int dx \int dx ... \int f(x)dx}_{n} + C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + ... + C_n x^{n-1}$;
8. $f\left(x; y'; ...; y^{(n)}\right) = 0$ понизить на единицу заменой $y' = z(x) \Rightarrow$ $y'' = z'(x), ..., y^{(n)} = z^{(n-1)} \Rightarrow f\left(x; z; z'; ...; z^{(n-1)}\right) = 0$.

Элементы комбинаторики

1. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$ – факториал;
2. $P_n = n!$ – перестановки;
3. $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ –число размещений;
4. $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – число сочетаний.

Классическое определение вероятности

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

гдеm– число элементарных исходов, благоприятствующих событию A;
n– число всех равновозможных элементарных исходов опыта, образующих полную группу событий.

Геометрическое определение вероятности

$$P(A)=\frac{S(A)}{S(\Omega)}.$$

Статистическое определение вероятности

$$P(A)=\omega(A)=\frac{m}{n},$$

где $P(A)$– вероятность появления события A;
$\omega(A)$ – относительная частота появления события A;
m– число испытаний, в которых появилось событие A;
n – общее число испытаний.

Теоремы сложения вероятностей

1. $P(A+B)=P(A)+P(B)$ – для несовместных событий;
2. $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$ – для совместных (независимых) событий.

Теоремы умножения вероятностей

1. $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$ – для независимых событий;
2. $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B\setminus A)=P(B)\cdot P(A\setminus B)$ – для зависимых событий.

Формула полной вероятности

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+\ldots+P(H_n)P(A/H_n).$$

Формула Байеса

$$P(H_k/A)=\frac{P(H_k)\cdot P(A/H_k)}{P(A)}=\frac{P(H_k)\cdot P(A/H_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P(A/H_i)}.$$

Элементы математической статистики

$\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, где n – общее число наблюдений (объем выборки);

$\omega_i = \frac{n_i}{n}$ – относительная частота;

$\omega_1 + \omega_2 + ... + \omega_k = 1$.

Числовые характеристики вариационных рядов

1. $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_k}{n}$ – средняя арифметическая простая;

2. $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + ... + x_k \cdot n_k}{n_1 + n_2 + ... + n_k}$ – средняя арифметическая взвешенная;

3. $R = x_{\max} - x_{\min}$ – размах;

4. $d = \frac{\sum_{i=1}^{k} \left| x_i - \bar{x} \right| \cdot n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = \frac{\left| x_1 - \bar{x} \right| \cdot n_1 + \left| x_2 - \bar{x} \right| \cdot n_2 + ... + \left| x_k - \bar{x} \right| \cdot n_k}{n_1 + n_2 + ... + n_k}$ –среднее линейное отклонение;

5. $D = \frac{\sum_{i=1}^{k} \left(x_i - \bar{x} \right)^2 \cdot n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = \frac{\left(x_1 - \bar{x} \right)^2 \cdot x_1 + ... + \left(x_1 - \bar{x} \right)^2 \cdot x_k}{n_1 + ... + n_k}$ – дисперсия;

6. $\sigma = \sqrt{D}$ – среднее квадратическое отклонение.

Операции над множествами

1. $A \bigcup B = \left\{ x \mid x \in A \text{ или } x \in B \right\}$.
2. $A \bigcap B = \left\{ x \mid x \in A \text{ и } x \in B \right\}$.
3. $A \setminus B = \{ x \mid x \in A \text{ и } x \notin B \}$.
4. $\bar{A} = U \setminus A = \{ x \mid x \notin A \text{ и } x \in U \}$.
5. $A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \}$.

Логические операции

- дизъюнкция $\vee$;
- конъюнкция &или $\wedge$;
- отрицание (инверсия) $\overline{a}$ ($\neg a$);
- импликация $\rightarrow$;
- эквивалентность (эквиваленция) $\Leftrightarrow$ или $\leftrightarrow$ или $\sim$;
- сложение Жегалкина (сложение по модулю 2) $\oplus$.

Таблица истинности для дизъюнкции

a	b	$a \vee b$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Таблица истинности для конъюнкции

a	b	$a \wedge b$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Таблица истинности для инверсии

a	$\overline{a}$
1	0
0	1

Таблица истинности для импликации

a	b	$a \rightarrow b$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Таблица истинности для эквивалентности

a	b	$a \Leftrightarrow b$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Таблица истинности для жегалкинского сложения

a	b	$a \oplus b$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Приоритет выполнения логических операций (при отсутствии скобок):

1) отрицание;
2) конъюнкция;
3) дизъюнкция, жегалкинское сложение;
4) импликация;
5) эквивалентность.

Основные законы алгебры логики

1. $(x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee (x_2 \vee x_3)$ (ассоциативность);

2. $x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$ (коммутативность);

3. $x_1 \vee 0 = 0 \vee x_1 = x_1$ (свойство нуля);

4. $1 \vee x_1 = x_1 \vee 1 = 1$ (закон поглощения для 1);

5. $(x_1 x_2) x_3 = x_1 (x_2 x_3)$ (ассоциативность);

6. $x_1 x_2 = x_2 x_1$ (коммутативность);

7. $x_1 0 = 0 x_1 = 0$ (свойство нуля по умножению);

8. $x_1 1 = 1 x_1 = x_1$ (свойство нейтральности 1 по умножению);

9. $x_1(x_2 \vee x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3$ (дистрибутивность);

10. $x_1 \vee x_2x_3 = (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)$ (дистрибутивность 2);

11. $x_1 \vee x_1x_2 = x_1$ (закон поглощения);

12. $\overline{x_1 \vee x_2} = \bar{x}_1\bar{x}_2$ (законы де Моргана);

13. $\overline{x_1x_2} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$ (законы де Моргана);

14. $\overline{\overline{x_1}} = x_1$ (закон снятия двойного отрицания);

15. $x_1 \vee \bar{x}_1 = 1$ (tertiumnondatur – третьего не дано);

16. $(x_1 \oplus x_2) \oplus x_3 = x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3)$ (ассоциативность);

17. $x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1$;

18. $x_1 \oplus 0 = 0 \oplus x_1 = x_1$;

19. $x_1 \oplus 1 = 1 \oplus x_1 = \bar{x}_1$;

20. $x_1 \oplus x_1 = 0$;

21. $x_1 \vee x_1 = x_1$;

22. $x_1x_1 = x_1$.

Абсолютная и относительная погрешность

1. $\Delta = |A - a|$ – абсолютная погрешность;

2. $\delta = \dfrac{\Delta}{|a|}$, $a \neq 0$ – относительная погрешность.

Десятичная запись приближенного числа

$$a = \alpha_m \cdot 10^m + \alpha_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \ldots + \alpha_0 \cdot 10^0 + \alpha_{-2} \cdot 10^{-2} + \ldots + \alpha_{-n} \cdot 10^{-n}.$$

Действия над приближенными числами

Алгебраическое выражение	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
суммы $a+b$	$\Delta(a+b)=\Delta a+\Delta b$	$\delta(a+b)\le\delta(a)$, где $\delta(a)\ge\delta(b)$
разности $a-b$	$\Delta(a-b)=\Delta a-\Delta b$	—
произведения $a\cdot b$	$\Delta(a\cdot b)=a\cdot\Delta b+b\cdot\Delta a$	$\delta(ab)=\delta(a)+\delta(b)$
частного $\dfrac{a}{b}$	$\Delta\left(\dfrac{a}{b}\right)=\dfrac{b\cdot\Delta a+a\cdot\Delta b}{b^2}$	$\delta\left(\dfrac{a}{b}\right)=\delta(a)+\delta(b)$
степени a^n	$\Delta(a^n)=n\cdot a^{n-1}\cdot\Delta a$	$\delta(a^n)=n\cdot\delta(a)$
корня $\sqrt[n]{a}$	$\Delta(\sqrt[n]{a})=\dfrac{\Delta a}{n\cdot\sqrt[n]{a^{n-1}}}$	$\delta(\sqrt[n]{a})=\dfrac{\delta(a)}{n}$

Приближенные методы вычисления производной от функции, заданной таблично

$$f'(x)\approx\frac{\Delta y_0+\frac{2t-1}{2}\cdot\Delta^2y_0+\frac{3t^2-6t+2}{6}\cdot\Delta^3y_0+\frac{2t^3-9t^2+11t-3}{12}\cdot\Delta^4y_0+\frac{5t^4-40t^3+105t^2-100t+24}{120}\cdot\Delta^5y_0+\ldots}{h}$$

$$t=\frac{x-x_0}{h}.$$

Приближенные методы интегрирования

Метод трапеций

$$\int_a^b f(x)dx\approx h\cdot\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2}+f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})\right],$$

где: $h=\dfrac{(b-a)}{n}$ – длина каждого из маленьких отрезков или *шаг*;

$f(x_i)$ – значения подынтегральной функции в точках $x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n$.

Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Метод Эйлера

$$y_{k+1}=y_k+f(x_k,y_k)\cdot h,\ k=0,1,2,\ldots,n-1.$$

Конечные разности

$\Delta y_0=y_1-y_0$

$\Delta y_1=y_2-y_1$

……………..

$\Delta y_{n-1}=y_n-y_{n-1}$ – конечные разности первого порядка.

$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$

$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$

……………..

$\Delta^2 y_{n-2} = y_{n-1} - y_{n-2}$ – конечные разности второго порядка.

Интерполяционные формулы Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}$$

Интерполяционные формулы Ньютона

1) Первая интерполяционная формула Ньютона:

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h \cdot 1!}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{h^2 \cdot 2!}(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{h^n \cdot n!}(x - x_0)\dots(x - x_{n-1}),$$

где $h = x_{i+1} - x_i$.

2) Вторая интерполяционная формула Ньютона:

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{h \cdot 1!}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{h^2 \cdot 2!}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{h^n \cdot n!}(x - x_n)\dots(x - x_1)$$

Координаты вектора

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1), \text{где } A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$$

Длина вектора

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \text{ где } A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$$

Линейные операции над векторами

1. $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$, где $\vec{a}(x_1; y_1), \vec{b}(x_2; y_2)$.
2. $\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2)$, где $\vec{a}(x_1; y_1), \vec{b}(x_2; y_2)$.
3. $k\vec{a} = (kx_1; ky_1; kz_1)$, где $\vec{a}(x_1; y_1)$.

Скалярное произведение векторов

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \vec{a} \,\hat{}\, \vec{b}.$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Общее уравнение прямой на плоскости

$$Ax + By + C = 0,$$

$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ – уравнение прямой, проходящей через данную точку $M(x_0; y_0)$ с нормальным вектором $\vec{n}(A; B)$.

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Уравнение прямой в отрезках

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$y=kx+b,\ k=tg\,\alpha.$$

Нормальное уравнение прямой

$$x\cos\beta+y\sin\beta-p=0.$$

Уравнение с данным направляющим вектором и точкой, принадлежащей прямой

$$\frac{x-x_1}{X}=\frac{y-y_1}{Y},$$

где вектор $\vec{s}(X,Y)$ направлен вдоль прямой, а точка $P(x_1,y_1)$ лежит на этой прямой.

Условие параллельности двух прямых

1. $Ax+By+C=0 \parallel A_1x+B_1y+C_1=0 \Leftrightarrow \frac{A}{A_1}=\frac{B}{B_1}\neq\frac{C}{C_1}$.

2. $y=kx+b \parallel y=k_1x+b_1 \Leftrightarrow k=k_1$.

Условие перпендикулярности двух прямых

1. $Ax+By+C=0 \perp A_1x+B_1y+C_1=0 \Leftrightarrow A\cdot A_1+B\cdot B_2=0$.

2. $y=kx+b \perp y=k_1x+b_1 \Leftrightarrow k=-\frac{1}{k_1}$.

Угол между прямыми

1. Если пара прямых на плоскости задана общими уравнениями:

$Ax+By+C=0$ и $A_1x+B_1y+C_1=0$, то

$$\cos\alpha=\frac{|A\cdot A_1+B\cdot B_1|}{\sqrt{A^2+B^2}\sqrt{A_1^2+B_1^2}}.$$

2. Если пара прямых на плоскости задана уравнениями: $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$, то $tg\alpha=\frac{k_1-k_2}{1+k_2k_1}$.

Точка пересечения двух прямых

Если на плоскости заданы две прямые $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$, то координаты точки пересечения этих прямых можно вычислить по формулам:

$$x_0=\frac{-C_1B_2+C_2B_1}{A_1B_2-A_2B_1},y_0=\frac{-A_1C_2+A_2C_1}{A_1B_2-A_2B_1}.$$

Расстояние от точки до прямой

$$d=\frac{\left|Ax_1+By_1+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Общее уравнение кривой 2-го порядка

$$Ax^2+2\,Bxy+Cy^2+\ 2Dx+2\,Ey+F=\ 0.$$

Окружность

1. $x^2+y^2=R^2$.–каноническое уравнение окружностис радиусом R, с центром в начале координат;

2. $\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2=R^2$–каноническое уравнение окружностис радиусом R, с центром в точке $C\left(a;b\right)$.

Эллипс

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$–каноническое уравнение эллипса.

Элементы эллипса

1. $F_1=\left(-c;0\right)$ и $F_2=\left(c;0\right)$ – фокусы, где

$$c=\sqrt{a^2-b^2}.$$

2. $F_1F_2=2c$, $c<a$–фокусное расстояние.
3. $2a$ - большая ось эллипса, $2b$ - малая ось эллипса.
4. $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$, $0<\varepsilon<1$– эксцентриситет эллипса;
5. $r_1=a+\varepsilon x$, $r_2=a-\varepsilon x$–фокальные радиусы эллипса;
6. $p=\dfrac{b^2}{a}$– фокальный параметр;
7. $x=\pm\dfrac{a}{\varepsilon}$–директрисы эллипса.

Гипербола

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$–каноническое уравнение гиперболы.

Элементы гиперболы

1. $F_1=(-c;0)$ и $F_2=(c;0)$ – фокусы, где $c=\sqrt{a^2+b^2}$.

2. $F_1F_2=2c$, $c>a$ –фокусное расстояние.

3. $2a$ – действительная ось гиперболы $\Rightarrow a$ – действительная полуось гиперболы;

$2b$ – мнимая ось гиперболы $\Rightarrow b$ – мнимая полуось гиперболы;

4. $\varepsilon=\frac{c}{a}$, $\varepsilon>1$ –эксцентриситет гиперболы;

5. фокальные радиусы гиперболы:

а) для левой ветви гиперболы:

$$r_1=-a-\varepsilon x,\ r_2=a-\varepsilon x;$$

б) для правой ветви гиперболы:

$$r_1=a+\varepsilon x,\ r_2=-a+\varepsilon x.$$

6. $p=\frac{b^2}{a}$ – фокальный параметр;

7. $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ –директрисы эллипса;

8. $y=\pm\frac{b}{a}x$ –асимптоты гиперболы.

Парабола

$y^2=2px$ –каноническое уравнение параболы.

Элементы параболы:

1. Точка F –фокус параболы, которая имеет координаты $\left(\frac{p}{2};0\right)$.

2. Расстояние r от любой точки $M(x;y)$ параболы до фокуса определяется формулой:

$$r=\frac{p}{2}+x.$$

3. Уравнение директрисы: $x=-\frac{p}{2}$.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Гончаренко, В.М. Элементы высшей математики [Электронный ресурс]: учебник / Гончаренко В.М., Липагина Л.В., Рылов А.А. — Москва : КноРус, 2019. — 363 с. — Режим доступа: https://book.ru/book/931506
2. Высшая математика [Электронный ресурс]: учебник и практикум / М. Б. Хрипунова [и др.] ; под общей редакцией М. Б. Хрипуновой, И. И. Цыганок. – Москва : Издательство Юрайт, 2019. – 472 с. – Режим доступа: https://biblio-online.ru/bcode/437476
3. Бардушкин, В.В. Математика. Элементы высшей математики[Электронный ресурс]: учебник: в 2 т. Т. 2 / В.В. Бардушкин, А.А. Прокофьев. — М.: КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2018. — 368 с.- Режим доступа : https://new.znanium.com/read?id=329558
4. Математика [Электронный ресурс] : учебник / О. В. Татарников [и др.] ; под общей редакцией О. В. Татарникова. – Москва : Издательство Юрайт, 2019. – 450 с. – Режим доступа: https://biblio-online.ru/bcode/433901
5. Математика. Практикум [Электронный ресурс]: учебное пособие / О. В. Татарников [и др.] ; под общей редакцией О. В. Татарникова. – Москва : Издательство Юрайт, 2019. – 285 с. – Режим доступа: https://biblio-online.ru/bcode/433902
6. Баврин, И. И. Математика [Электронный ресурс]: учебник и практикум / И. И. Баврин. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2019. – 616 с. – Режим доступа: https://biblio-online.ru/bcode/426511
7. Седых, И. Ю. Математика [Электронный ресурс]: учебник и практикум / И. Ю. Седых, Ю. Б. Гребенщиков, А. Ю. Шевелев. – Москва : Издательство Юрайт, 2019. – 443 с. – Режим доступа: https://biblio-online.ru/bcode/433707
8. Численные методы [Электронный ресурс]: учебник и практикум / У. Г. Пирумов [и др.] ; под редакцией У. Г. Пирумова. – 5-е изд., перераб. и доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2019. – 421 с. – Режим доступа: https://biblio-online.ru/bcode/445775

Учебное издание

МАТЕМАТИКА

Сборник задач

Авторы:

Гаврилова Людмила Николаевна

Ахмедгараева Зульфия Саматовна

Главный редактор *Г. Я. Дарчинова*
Редактор *Т. В. Андреева*
Технический редактор *С. А. Каримова*
Дизайнер *Н. Е. Коняхина*

Подписано в печать 20.02.2019. Формат 60х84 1/16
Гарнитура Times NR, 10. Усл. печ. л. 2,9
Тираж 300 экз. Заказ № 90

ЗНАК ИНФОРМАЦИОННОЙ ПРОДУКЦИИ +12 ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ЗАКОН № 436-ФЗ ОТ 29.12.2010

ПОЗНАНИЕ

Издательство Казанского инновационного
университета им. В. Г. Тимирясова (ИЭУП)
420111, г. Казань, ул. Московская, 42
Тел. (843) 231-92-90
E-mail: zaharova@ieml.ru

Отпечатано с готового оригинал-макета
в типографии ООО «ТЦО «Таглимат»:
420108, г. Казань, ул. Зайцева, 17